Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE

O 316

Digitized by Google

Paris.—Imprimé chez Bonaventure et Ducessois, 55, quai des Augustins.

Digitized by Google

S

LEÇONS
DE
GÉOMÉTRIE
ANALYTIQUE

PAR

CH. BRIOT

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS.

ET

CL. BOUQUET

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME ÉDITION
ENTIÈREMENT REFONDUE

PARIS
DEZOBRY, E. MAGDELEINE ET Cᵉ, LIBRAIRES-ÉDITEURS
RUE DES ÉCOLES, 78
Près du musée de Cluny et de la Sorbonne.

1860

AVERTISSEMENT

Ce volume contient les matières du programme de la classe de mathématiques spéciales dans les lycées. L'extension que nous avons cru devoir donner à cette partie de notre ouvrage nous a imposé la suppression de plusieurs théories importantes qui faisaient partie des précédentes éditions ; nous les publierons dans un second volume, avec des développements convenables, sous le titre de *Compléments de Géométrie analytique.*

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE I.

Préliminaires.

CHAPITRE I.—Des Coordonnées.

		Pages.
1.	Coordonnées rectilignes	2
2.	Coordonnées rectilignes rectangulaires	3
3.	Coordonnées polaires	3
4.	Coordonnées bi-polaires	4
5.	Idée générale des systèmes de coordonnées	4
6-9.	Représentation des lignes planes par des équations	5

CHAPITRE II.—Exemples.

10.	Considérations générales	7
11.	Cercle	7
12-19.	Ellipse	7
20-23.	Hyperbole	13
24-26.	Parabole	15
27.	Définition de la tangente	18
28-31.	Cissoïde de Dioclès	18
31-33.	Strophoïde	21
34-38.	Limaçon de Pascal	24
39.	Rosace à quatre branches	27

CHAPITRE III.—De l'Homogénéité.

40.	Définitions	28
41.	Propriétés des fonctions homogènes	29
42.	Théorème fondamental	30

Digitized by Google

Pages.
43. Corollaire 31
44-48. Remarques 31

CHAPITRE IV.—Transformation des coordonnées.

49. Déplacement de l'origine 36
50. Changement de la direction des axes ; cas des axes rectangulaires 37
51. Cas des axes obliques 38
52. Cas particuliers 40
53. Transformation générale 41
54. Transformation des coordonnées rectilignes en coordonnées polaires 42
55-56. Distance de deux points 42
57. Milieu d'une droite 44
58. Classification des lignes 44

LIVRE II.

Ligne droite et Cercle.

CHAPITRE I.—Ligne droite.

59. Construction de l'équation du premier degré 47
60. Équation de la droite 49
61. Signification des coefficients 50
62. Construire une droite donnée par une équation 51
63. Conditions nécessaires pour définir une droite 52
64. Equation générale des droites qui passent par un point donné 52
65. Par un point donné mener une parallèle à une droite donnée 53
66-67. Mener une droite par deux points donnés 54
68. Point d'intersection de deux droites 55
69-70. Droite passant par le point d'intersection de deux droites données 56
71. Reconnaître si trois points sont en ligne droite 57
72. Reconnaître si trois droites passent par un même point 58
73. Exemple de trois points en ligne droite 60
74. Trouver l'angle de deux droites 61
75. Condition de perpendicularité de deux droites 61
76-78. Mener par un point donné une perpendiculaire sur une droite donnée 62
79-80. Par le point d'intersection de deux droites données, mener une perpendiculaire à une droite donnée 66

Pages.

81. Trouver le lieu des points également distants de deux points donnés..... 67
82. Trouver le lieu des points également distants de deux droites données..... 67
83. Équation de la ligne droite en coordonnées polaires..... 67

Chapitre II.—Du Cercle.

84-85. Équation du cercle en coordonnées rectangulaires..... 68
86-87. Équation du cercle en coordonnées obliques..... 69
88. Équation de la tangente à une courbe quelconque..... 71
89. Équation de la tangente au cercle..... 72
90-91. Mener une tangente par un point extérieur..... 73
92-93. Tangente parallèle à une droite donnée..... 75
94. Lieu des points dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport donné..... 76
95-96. Points d'intersection de deux cercles..... 77
97. Les axes radicaux de trois cercles pris deux à deux se coupent au même point..... 78

Chapitre III.—Lieux géométriques.

98-101. Considérations générales..... 78
102-110. Exemples..... 82

LIVRE III.

Courbes du second degré.

Chapitre I.—Construction des Lignes du second degré.

111. Résolution de l'équation générale..... 97
112-115. Genre ellipse..... 98
116-119. Genre hyperbole..... 101
120. Genre parabole..... 105
121-123. Cas où les carrés des variables ont des coefficients égaux à zéro..... 106
124. Remarque..... 108

Chapitre II.—Centre, Diamètre et Axes des courbes du second degré.

125-127. Centre..... 109
128. Translation des axes, parallèlement à eux-mêmes, au centre de la courbe..... 112
129. Diamètres..... 113
130. Cas de la parabole..... 114
131. Directions auxquelles il ne correspond pas de diamètre... 114

Digitized by Google

Pages.

132-133. Lorsque la courbe à un centre les diamètres passent en ce point..... 114
134. Diamètres conjugués..... 115
135-137. Axes et sommets..... 116
138. Ellipse et hyperbole rapportées à deux diamètres conjugués..... 117
139. Parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à son extrémité..... 118

CHAPITRE III.—Réduction de l'Équation du second degré.

140. Exposé de la question..... 118
141. Ellipse et hyperbole..... 119
142. Parabole.. Exemples..... 121

CHAPITRE IV.—De l'Ellipse.

143. Construction de l'ellipse..... 126
144. Variations du rayon..... 128
145. Signe de la fonction $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ pour les divers points du plan..... 128
146. Rapport des carrés des ordonnées..... 129
147-148. L'ellipse et la projection orthogonale d'un cercle, et inversement..... 129
149. Construction de l'ellipse par points..... 131
150. Intersections d'une droite et d'une ellipse..... 131
151. Équation de la tangente..... 132
152. Construction de la tangente en un point de l'ellipse..... 133
153-154. Mener une tangente par un point extérieur..... 133
155-156. Mener une tangente parallèle à une droite donnée..... 135
157. Autre forme de l'équation de la tangente..... 136
158. Lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à une ellipse. 137
159. Diamètres..... 138
160. Tangente à l'extrémité d'un diamètre..... 139
161. Propriétés des diamètres déduites de celles du cercle.... 139
162. Ellipse rapportée à deux diamètres conjugués..... 140
163-165. Théorèmes d'Apollonius sur les diamètres conjugués..... 141
166-167. Autre démonstration..... 143
168. Aire de l'ellipse..... 145
169. Diamètres conjugués égaux..... 146
170. Cordes supplémentaires..... 147
171. Angle de deux diamètres conjugués..... 147
172. Constructions diverses sur l'ellipse..... 149

Pages.
173-176. Connaissant deux diamètres conjugués de l'ellipse, trouver ses axes..... 149
177-179. Description de l'ellipse d'un mouvement continu..... 152

Chapitre V.—De l'Hyperbole.

180. Construction de l'hyperbole..... 156
181. Rapport des carrés des coordonnées..... 158
182. Asymptotes de l'hyperbole..... 158
183. Hyperboles conjuguées..... 159
184. Hyperbole équilatère..... 159
185. Signe de la fonction $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$..... 160
186-187. Tangente à l'hyperbole..... 160
188. Mener une tangente par un point extérieur..... 161
189. Tangente parallèle à une droite donnée..... 162
190. Lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à l'hyperbole. 163
191-192. Diamètres..... 163
193. Hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués..... 164
194. Propriétés des diamètres conjugués..... 166
195-197. Propriétés des sécantes..... 167
198. Construire les axes, connaissant deux diamètres conjugués. 169
199. Cordes supplémentaires..... 169
200. Hyperbole rapportée à ses asymptotes..... 169
201-202. Aire d'un segment d'hyperbole..... 170

Chapitre VI.—De la Parabole.

203. Construction de la courbe..... 174
204. Construction par points..... 174
205. Rapport des carrés des ordonnées..... 175
206. La parabole n'a pas d'asymptote..... 175
207. Tangente à la parabole..... 176
208. Mener une tangente par un point extérieur..... 176
209. Tangente parallèle à une droite donnée..... 177
210. Normale à la parabole..... 177
211. Diamètres de la parabole..... 178
212-213. Parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à son extrémité..... 178
214. Aire d'un segment de parabole..... 180

Chapitre VII.—Foyers et Directrices.

215-217. Définitions..... 181
218. Foyers et directrices de l'ellipse..... 185

Pages.

219-220. La somme des rayons vecteurs est constante..... 187
221. Cercle directeur..... 189
222-226. Propriétés de la tangente..... 190
227-230. Problèmes sur la tangente..... 193
231. Intersections d'une droite et d'une ellipse..... 196
232. Foyers et directrices de l'hyperbole..... 197
233-234. Différence des rayons vecteurs..... 198
235. Cercle directeur..... 200
236-237. Propriétés des tangentes..... 201
238. Ellipse et hyperbole homofocales..... 202
239-241. Problèmes sur la tangente..... 202
242. Intersections d'une droite et d'une hyperbole..... 204
243-244. Foyer et directrice de la parabole..... 204
245-247. Propriétés de la tangente..... 206
248-251. Problèmes sur la tangente..... 209
252. Intersections d'une droite et d'une parabole..... 212
253-254. Parabole limite d'une série d'ellipses ou d'hyperboles.... 212
255-259. Théorèmes sur les foyers et les directrices des courbes du second degré..... 214
260. Équations polaires des courbes du second degré..... 217

Chapitre VIII.—Sections coniques.

261-262. Sections du cylindre..... 223
263-265. Sections du cône..... 225

Chapitre IX.—Conditions nécessaires pour la Détermination d'une courbe du second degré.

266. Exposé de la question..... 229
267-268. Courbe du second degré qui passe par cinq points..... 231
269-271. Courbes du second degré circonscrites à un quadrilatère ou inscrites dans un angle..... 233
272-273. Courbes circonscrites à un triangle..... 236
274-275. Conditions multiples..... 237
276-277. Construire une courbe du second degré, connaissant un foyer et trois points de la courbe..... 240
278. Construire une courbe du second degré, connaissant un foyer et trois tangentes..... 241
279-281. Points et droites imaginaires..... 242
282-290. Intersections de deux courbes du second degré..... 244
291. Théorème général sur le système d'un cercle et d'une ellipse..... 251

Digitized by Google

Pages.

LIVRE IV.

Chapitre I.—Construction des Courbes en coordonnées rectilignes.

292. Considérations générales..... 255
293. Équations résolues..... 255
294. Variations de l'ordonnée-tangente..... 256
295. Maxima et minima de l'ordonnée..... 256
296-298. Exemples..... 257
299. Équations non résolues..... 259
300-301. Exemples..... 260
302. Emploi d'une variable auxiliaire..... 266
303-304. Exemples..... 266

Chapitre II.—Convexité et Concavité.

305. Situation d'un arc de courbe par rapport à l'une de ses tangentes..... 269
306. Points d'inflexion..... 270
307-314. Exemples..... 271

Chapitre III.—Asymptotes.

315. Définitions..... 278
316. Asymptotes parallèles à l'axe des y..... 279
317-318. Exemples..... 280
319. Asymptotes non parallèles à l'axe des y..... 281
320. Équations résolues..... 282
321-325. Exemples..... 283
326-329. Équations non résolues..... 285
330-331. Exemples..... 289
332. Remarque sur les asymptotes des courbes transcendantes..... 289
333. Courbes asymptotiques..... 290

Chapitre IV.—Construction des Courbes en Coordonnées polaires.

334. Les coordonnées polaires ω et ρ doivent varier de $-\infty$ à $+\infty$..... 291
335. Remarque sur les coordonnées d'un point d'une courbe... 293
336. Remarque sur la transformation des coordonnées..... 294
337. Symétrie d'une courbe par rapport à l'axe polaire ou à la perpendiculaire..... 295
338-339. Tangente..... 296
340-344. Exemples..... 298
345. Asymptotes..... 303

Digitized by Google

Pages.
346-350. Exemples..... 304
351. Formule pour calculer la distance de l'asymptote au pôle. 312

Chapitre V.—De la Similitude.

352-353. Définitions..... 315
354-358. Propriétés des figures homothétiques..... 317
359. Conditions de similitude de diverses figures..... 320
360. Équation des courbes homothétiques..... 322
361. Équation des courbes semblables..... 323
362-363. Conditions d'homothétie de deux courbes du second degré. 323
364-366. Équations générales d'une espèce de courbes..... 325
367-368. Conditions nécessaires pour définir une courbe d'espèce donnée..... 327
369-370. Conditions de similitude de deux figures..... 328

Chapitre VI.—Des Problèmes déterminés.

371-372. Équations du problème..... 330
373. Différents cas d'un problème..... 333
374-375. Généralisation de l'énoncé..... 336
376. Cas d'un système d'équations dans lequel les inconnues entrent d'une façon symétrique..... 341
377. Construction des formules..... 343
378. Monome rationnel..... 344
379. Fonction rationnelle..... 344
380. Formule irrationnelle du second degré..... 345
381. Remarque..... 347
382. Combinaison des constructions élémentaires..... 347
383. Constructions synthétiques..... 349
384. Construction des racines de l'équation du second degré et de l'équation bi-carrée..... 350
385. Construction des solutions de deux équations à deux inconnues, l'une du premier et l'autre du second degré.... 351
386-389. Construction des racines de l'équation du troisième ou du quatrième degré..... 352
390. Construction des solutions de deux équations du second degré à deux inconnues..... 354
391. Résolution graphique des équations..... 357
392. Équations transcendantes..... 358
393. Remarques..... 359

DEUXIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE V.

Chapitre I.—Des Coordonnées.

Pages.

394. Coordonnées rectilignes..... 365
395. Coordonnées polaires..... 366
396. Représentation des surfaces par des équations..... 367
397. Réciproque..... 367
398. Représentation des lignes..... 369
399. Direction d'une droite..... 369
400. Relation entre les trois cosinus..... 370
401. Angle de deux directions..... 370
402. Cas des axes obliques..... 371

Chapitre II.—Transformation des Coordonnées.

403. Déplacement de l'origine..... 372
404. Changement de direction des axes..... 372
405-406. Axes rectangulaires, relations entre les neuf cosinus..... 373
407. Formules d'Euler..... 375
408. Remarque sur le sens des rotations..... 377
409. Formules générales..... 378
410. Classification des surfaces..... 378
411. Section d'une surface par un plan..... 379
412. Transformation des coordonnées rectilignes en coordonnées polaires..... 380
413. Distance de deux points..... 381

Chapitre III.—Du Plan et de la Ligne droite.

Du plan.

414. Construction de l'équation du premier degré..... 382
415. Équation du plan..... 383
416. Conditions de parallélisme de deux plans..... 384
417. Équation générale des plans qui passent par un point donné..... 385
418. Plan passant par trois points..... 385

Pages.
419. Intersection de trois plans..... 386
420. Angles de la normale au plan avec les axes..... 387
421. Angle de deux plans..... 388
422. Distance d'un point à un plan..... 388

DE LA LIGNE DROITE.

423. Projections d'une droite..... 389
424. Équations générales des droites qui passent par un point donné..... 389
425. Droite passant par deux points..... 390
426. Intersection d'une droite et d'un plan..... 390
427. Condition pour que deux droites se rencontrent..... 391
428. Équation générale des plans qui passent par la droite de rencontre de deux plans donnés..... 391
429. Mener un plan par un point et une droite donnés..... 392
430. Par un point donné mener un plan perpendiculaire à un plan donné..... 392
431. Angles d'une droite avec les axes..... 393
432. Par un point mener une droite qui fasse avec les axes des angles donnés..... 394
433. Angle de deux droites..... 395
434. Angle d'une droite et d'un plan..... 396
435. Conditions pour qu'une droite et un plan soient perpendiculaires..... 396
436-437. Par un point donné mener une droite perpendiculaire à un plan donné..... 397
438-439. Par un point donné mener un plan perpendiculaire à une droite donnée..... 399
440. Par un point donné mener une droite perpendiculaire à une droite donnée..... 400
441. Distance d'un point à une droite..... 400
442-443. Plus courte distance de deux droites..... 401
444. Sphère..... 402

CHAPITRE IV.—Génération des Surfaces.

445. Considérations générales..... 405
446-448. Surfaces cylindriques..... 406
449-450. Surfaces coniques..... 408
451-452. Surfaces conoïdes..... 409
453-456. Surfaces de révolution..... 411
457-460. Plan tangent..... 415

Digitized by Google

Pages.

Chapitre V.—De la Similitude.

461. Définitions..... 420
462-465. Propriétés des figures homothétiques..... 421
466. Exemples..... 422
467. Sections parallèles d'une surface du second degré..... 423

LIVRE VI.

Surfaces du second degré.

Chapitre I.—Centre et Plans diamétraux.

468. Équation générale du second degré..... 425
469-472. Du centre..... 425
473. Translation des axes au centre..... 428
474. Remarque sur le plan tangent..... 429
475-476. Plans diamétraux..... 429
478-479. Surfaces du second degré rapportées à des plans diamétraux 431
480-488. Plans diamétraux principaux..... 432

Chapitre II.—Réduction de l'Équation du second degré.

489-491. 1er cas. D est différent de zéro..... 442
492-493. 2e cas. D est égal à zéro..... 443

Chapitre III.—Ellipsoïde.

494. Forme générale de la surface..... 445
495. Centre, axes, sommet..... 445
496. Sections de la surface..... 446
497. Plans diamétraux..... 447
498. Diamètres..... 447
499. Plan tangent..... 448
500-501. Diamètres conjugués..... 449
502. Sections circulaires..... 451

Chapitre IV.—Des Hyperboloïdes.

504. Cône..... 452
505. Hyperboloïde à une nappe..... 454
506. Hyperboloïde à deux nappes..... 455
507-508. Cône asymptote..... 456
509-510. Sections planes..... 457
511-513. Plans diamétraux..... 459
514. Diamètres..... 460
515-517. On complète l'étude des sections planes..... 462

Digitized by Google

Pages.

518. Sections circulaires..... 464
519. Section anti-parallèle du cône oblique..... 465
520-538. Génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe..... 466

Chapitre V.—Des Paraboloïdes.

539. Paraboloïde elliptique..... 481
540-541. Sections planes..... 482
542. Plans diamétraux..... 483
543-544. Diamètres..... 483
545. Sections circulaires..... 485
546. Paraboloïde hyperbolique..... 485
547. Sections planes..... 486
548-549. Plans diamétraux..... 487
550-563. Génératrices rectilignes..... 488

Chapitre VI.—Discussion des Équations numériques du second degré.

564. Première méthode..... 498
565. Tableau résumé de la discussion..... 500
566. Deuxième méthode..... 501
567-571. Troisième méthode..... 507

Chapitre VII.—Des Conditions nécessaires pour définir une surface du second degré.

572. Préliminaires..... 516
573. Exprimer qu'un plan est tangent à une surface..... 516
574. Exprimer qu'une droite est située sur une surface..... 517
575-576. Surfaces du second degré qui passe par neuf points..... 517
577-580. Surfaces du second degré qui passent par la ligne d'intersection de deux surfaces données du second degré..... 518
581. Surfaces tangentes en deux points..... 520
582-584. Surfaces tangentes en trois points..... 521
585. Intersection de deux surfaces qui ont le même plan diamétral pour une certaine série de cordes..... 523
586. Cônes du second degré passant par la ligne d'intersection de deux surfaces du second degré..... 524

FIN DE LA TABLE.

ERRATA DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Page 73, ligne 12 en descendant, au lieu de : $x+XyY=r^2$,
lisez : $xX+yY=r^2$.

Page 254, ligne 15 — au lieu de : et pour direction la sécante,
lisez : et pour directrice la sécante.

Page 261, ligne 10 — au lieu de : $\sqrt{a^2+b^2}$,
lisez : $\sqrt{a^2+c^2}$.

Page 266, corrigez la figure 168; la branche de courbe OC doit couper l'asymptote et passer de l'autre côté.

Page 268, ligne 6 en remontant, au lieu de : entre -2 et 0,
lisez : entre -1 et 0.

Page 272, ligne 8 au lieu de : $x^3 \pm x^{\frac{3}{2}}$,
lisez : $x^3 \pm x^{\frac{5}{2}}$.

Page 275, ligne 7 en descendant, au lieu de : y augmente,
lisez : y' augmente.

Page 289, lignes 11, 12, 13 et 14 en descendant, lisez :

Les termes du degré $m-1$ manquant, on a $d=0$; comme cette valeur de d annule le polynôme (6), on ne peut pas en conclure que la droite $y=-x$ est asymptote, ainsi que nous l'avons reconnu d'une autre manière.

Page 352, ligne 20 en descendant, au lieu de : l'abscisse d'un point commun.
lisez : l'abscisse d'un point réel commun.

Page 353, ligne 4 en montant, au lieu de : $R^2=\alpha^2+\beta^2-r$,
lisez : $R^2=\alpha^2+\beta^2-\frac{r}{m^2}$.

Page 355, ligne 10 en montant, au lieu de : les équations (2) et (3),
lisez : les équations (1) et (3).

Digitized by Google

GÉOMÉTRIE
ANALYTIQUE

La *Géométrie analytique* a pour but l'étude des *figures* par les procédés du calcul ou de l'*analyse* algébrique.

C'est Descartes qui a trouvé le moyen de représenter les figures par des symboles algébriques, et qui a ramené ainsi la science des figures à la science des nombres.

Nous nous occuperons d'abord des figures planes ou à deux dimensions, et ensuite des figures dans l'espace ou à trois dimensions.

GÉOMÉTRIE PLANE

LIVRE I
PRÉLIMINAIRES

CHAPITRE I
Des Coordonnées.

On détermine la position d'un point dans un plan au moyen de deux quantités que l'on nomme les *coordonnées* du point.

Il y a une infinité de *systèmes de coordonnées*. Nous parlerons seulement des systèmes les plus simples et les plus fréquemment employés.

COORDONNÉES RECTILIGNES.

1. — Soient deux droites ou axes fixes X'X et Y'Y tracées dans le plan (fig. 1), la position d'un point quelconque M du plan sera déterminée par l'intersection de deux droites G'G, H'H parallèles aux axes. La position de la parallèle H'H est définie par sa distance OP à l'axe Y'Y, distance comptée sur l'autre axe; il faut, de plus, indiquer de quel côté de l'axe est située la parallèle; ce sera par le signe; on convient d'affecter la distance OP du signe + si elle tombe sur OX, du signe — si elle tombe sur OX'. De même, la position de la parallèle G'G est définie par sa distance OQ à l'axe X'X, distance comptée sur le second axe et prise avec le signe + ou le signe —, suivant qu'elle tombe sur OY ou sur OY'.

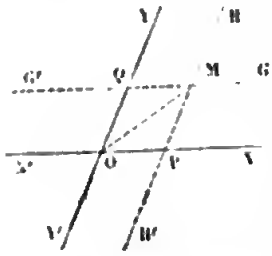


Fig. 1.

Ces deux longueurs OP et OQ, affectées chacune du signe convenable, qui déterminent ainsi la position des deux parallèles, et par conséquent le point M, sont les *coordonnées rectilignes* du point. On les désigne ordinairement par les lettre x et y. Cependant la coordonnée désignée par x porte plus particulièrement le nom d'*abscisse*, l'autre, y, celui d'*ordonnée*. Les deux droites fixes X'X et Y'Y s'appellent les *axes des coordonnées*; le premier est l'axe des x, le deuxième l'axe des y. Le point O, à partir duquel on compte les coordonnées sur chaque axe, dans un sens ou dans l'autre, prend le nom d'*origine des coordonnées*.

Si l'on donne à x et à y toutes les valeurs possibles positives ou négatives, en d'autres termes, si l'on fait varier x et y de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient tous les points du plan; d'ailleurs, chaque couple de valeurs donne un point et un seul.

Nous remarquons que les deux coordonnées du point M sont les projections de la droite OM sur les axes OX et OY, la projection sur chaque axe se faisant parallèlement à l'autre. La

projection sur l'axe des x, comme la coordonnée x elle-même, est la longueur OP, affectée du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est portée dans la direction OX, ou dans la direction opposée OX'; de même, la projection sur l'axe des y, comme la coordonnée y, est la longueur OQ, affectée du signe + ou du signe—, suivant qu'elle est portée dans la direction OY ou dans la direction opposée OY'.

COORDONNÉES RECTILIGNES RECTANGULAIRES.

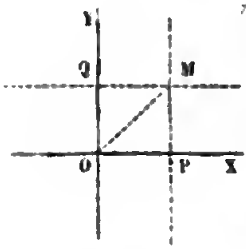


Fig. 2.

2—Ordinairement on trace les axes fixes perpendiculaires entre eux; dans ce cas les deux coordonnées du point M (fig. 2) sont les distances de ce point aux deux axes; ce sont aussi les projections orthogonales de la droite OM sur les deux axes.

COORDONNÉES POLAIRES.

3—Soit O un point fixe nommé *pôle*, OX un axe fixe (fig. 3); on peut déterminer la position du point M par la longueur ρ du *rayon vecteur* OM et par l'angle ω que fait ce rayon vecteur avec l'axe.

Fig. 3.

La position du point M est déterminée par l'intersection d'un cercle de rayon ρ, ayant pour centre le pôle, et d'une demi-droite OL partant du pôle et faisant avec l'axe OX l'angle ω (fig. 4). Mais il faut convenir du sens dans lequel on compte l'angle ω, à partir de l'axe OX.

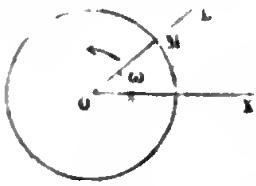


Fig. 4.

On obtient tous les points du plan en faisant varier ρ de 0 à $+\infty$ et ω de 0 à 2π. En effet, si, laissant ω constant, on fait varier ρ de 0 à $+\infty$, on a tous les points de la demi-droite OL; si ensuite on fait varier ω de 0 à 2π, la demi-droite OL part de la position OX et décrit tout le plan.

COORDONNÉES BI-POLAIRES.

4—On peut aussi définir la position d'un point M par ses distances u et v à deux points fixes F et F′ (fig. 5). La position du point M se trouve alors déterminée par l'intersection de deux circonférences décrites des points F et F′ comme centres avec les rayons u et v. Mais ce système n'offre pas la même perfection théorique que les deux précédents; d'abord, tout couple de valeurs de u et v n'est pas admissible; il faut que la distance des pôles soit moindre que leur somme et plus grande que leur différence; lorsque cette condition est remplie, les deux circonférences se coupant en deux points, il en résulte une ambiguïté fâcheuse.

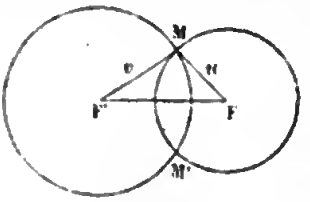


Fig. 5.

IDÉE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DE COORDONNÉES.

5—Le nombre des systèmes de coordonnées est infini. En général, on détermine la position d'un point dans un plan par l'intersection de deux lignes tracées dans ce plan. Soient (fig. 6) A′, A″, A‴,... une première série de lignes de même espèce correspondant à diverses valeurs u', u'', u''',... de la variable u; et B′, B″, B‴,... une seconde série de lignes de même espèce, correspondant à diverses valeurs v', v'', v''',... de la variable v; un point quelconque du plan est défini par le couple des deux lignes qui passent en ce point, et les valeurs particulières qu'il faut donner aux variables u et v pour avoir ces deux lignes s'appellent les *coordonnées* du point. L'ensemble de ces deux séries de lignes constitue un système de coordonnées.

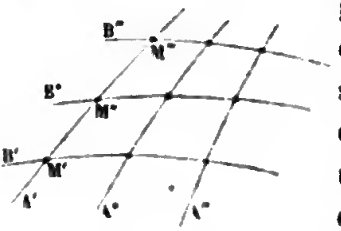


Fig. 6.

Dans le premier des systèmes que nous avons étudiés, chacune des deux séries de lignes se compose de droites parallèles;

c'est pourquoi on désigne ces coordonnées sous le nom de coordonnées rectilignes.

Dans le système polaire, la première série se compose de demi-droites émanant du pôle O, et définies par l'angle variable ω qu'elles font avec l'axe OX (fig. 4); la seconde série de cercles concentriques décrits autour du pôle avec le rayon variable ρ.

Dans le système bi-polaire, chacune des séries se compose de cercles concentriques.

REPRÉSENTATION DES LIGNES PLANES PAR DES ÉQUATIONS.

6 — Soit une ligne plane quelconque AB (fig. 7). Traçons dans le plan deux axes OX et OY, et désignons par x et y les deux coordonnées OP et MP d'un point M quelconque de la ligne; quand le point M se meut sur la ligne, les deux coordonnées varient simultanément; si l'on donne à l'abscisse une valeur arbitraire OP, la grandeur de l'ordonnée correspondante MP est parfaitement déterminée et la variation de l'abscisse entraîne celle de l'ordonnée. Ainsi l'ordonnée MP est une fonction de l'abscisse OP; la nature de cette fonction dépend de celle de la ligne. Quand la ligne est définie géométriquement, on conçoit que l'on puisse, de la définition géométrique de la ligne, déduire une équation entre x et y, servant à définir analytiquement la fonction y. L'équation en x et y que l'on trouve de cette manière s'appelle l'équation de la ligne.

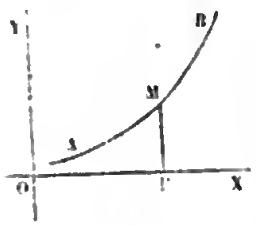


Fig. 7.

7 — Supposons, réciproquement, que l'on donne une équation

$$F(x, y) = 0,$$

entre deux variables x et y; chaque couple de valeurs réelles de x et y qui satisfont à cette équation détermine un point du plan; or, si l'on fait varier x d'une manière continue entre certaines limites, l'équation est ordinairement satisfaite par des valeurs de y réelles et continues; l'ensemble des points

obtenus de la sorte forme donc une suite continue, c'est-à-dire une ligne. Ainsi, en général, *une équation entre les deux coordonnées représente une ligne plane.*

8—Ce que nous venons de dire des coordonnées rectilignes a lieu évidemment dans tout autre système de coordonnées. Dans le système polaire, quand le point M se meut sur la ligne, le rayon vecteur ρ varie avec l'angle ω; c'est une fonction de ω, et la ligne est représentée par une certaine équation entre ρ et ω.

9—La représentation des figures par des équations est le fondement de la Géométrie analytique; c'est là ce qui permet d'appliquer à l'étude des figures les procédés du calcul algébrique. On s'occupe en Géométrie analytique de trois questions fondamentales : Quand une figure est définie géométriquement, on cherche son équation; réciproquement, on apprend à construire la figure que représente une équation donnée; enfin, on étudie les relations qui existent entre les propriétés géométriques des figures et les propriétés analytiques des équations.

Les exemples que nous donnons dans le chapitre suivant feront bien comprendre comment on représente les lignes par des équations.

CHAPITRE II

Exemples.

10—En général, la définition géométrique d'une courbe, déterminant chacun de ses points, correspond à un certain système de coordonnées; si l'on choisit le système particulier indiqué par l'énoncé, l'équation de la courbe est la traduction immédiate de sa définition géométrique.

Voir au Cours

CERCLE.

11. —*Le cercle est le lieu des points également distants d'un point fixe appelé centre.* On le décrit à l'aide d'un compas, en plaçant une pointe au centre, l'autre pointe trace la circonférence.

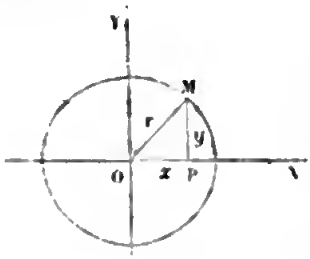


Fig. 8.

Si l'on prend le centre O pour pôle et une droite quelconque OX pour axe polaire (fig. 8), et que l'on désigne par r la longueur du rayon, l'équation de la circonférence en coordonnées polaires est

$$(1)\quad \rho = r,$$

puisque la longueur du rayon vecteur est constamment égale à r, quelle que soit la valeur de l'angle ω.

Cherchons maintenant l'équation du cercle en coordonnées rectilignes. Si l'on prend deux axes rectangulaires OX et OY passant par le centre, le triangle rectangle OMP donne immédiatement l'équation

$$(2)\quad x^2 + y^2 = r^2,$$

qui existe entre les deux coordonnées x et y d'un point M de la circonférence. C'est l'équation de la circonférence dans ce système de coordonnées.

ELLIPSE.

12.—*L'ellipse est une courbe telle que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes est constante.* Ces deux points sont les *foyers* de l'ellipse.

Il est facile de construire l'ellipse par points. Soient F et F′ (fig. 9) les deux foyers. Portez sur la droite F′F une longueur F′K égale à la somme constante des distances de chacun des points de la courbe aux deux foyers. Du foyer F′ comme centre, avec différents rayons, décrivez une série de cercles. Soit D le point où l'un d'eux coupe la droite F′F ; prenez une ouverture

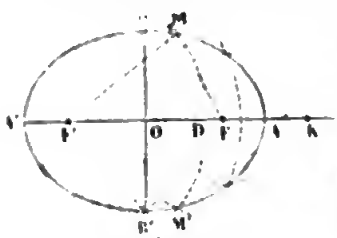


Fig. 9.

de compas égale à KD, et du foyer F comme centre, avec cette ouverture de compas, décrivez un second cercle; ce cercle coupera le premier en deux points M et M', qui appartiendront à l'ellipse; car la somme des distances MF' et MF du point M aux deux foyers est égale à la somme des deux rayons F'D et KD, c'est-à-dire à la longueur donnée F'K.

Répétez la même construction pour chacun des cercles décrits du foyer F' comme centre; et quand vous aurez ainsi obtenu un assez grand nombre de points, vous ferez passer à la main un trait continu par tous ces points, et vous aurez l'ellipse demandée.

13—On emploie la construction graphique que nous venons d'indiquer dans les épures sur le papier. Mais dans les arts, quand on veut tracer une ellipse sur une planche ou sur une feuille de carton, on a recours à un procédé beaucoup plus rapide.

On fixe aux deux foyers F et F' (fig. 10) deux pointes auxquelles on attache les deux extrémités d'un fil ayant la longueur voulue. On tend ensuite le fil avec un style ou un crayon, que l'on fait mouvoir dans le plan en tenant le fil constamment tendu, et l'on décrit ainsi l'ellipse. Car, dans chacune des positions du fil, la somme des distances MF et MF' est égale à la longueur constante du fil.

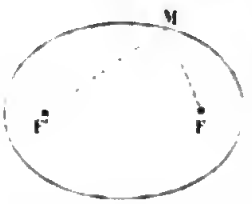


Fig. 10.

Ce mode de description montre bien que l'ellipse est une courbe fermée comme le cercle.

14—Nous indiquerons de suite quelques-unes des propriétés les plus simples de l'ellipse.

On appelle *axe* d'une courbe une ligne droite qui divise la courbe en deux parties symétriques, c'est-à-dire en deux parties égales, qui s'appliquent exactement l'une sur l'autre, quand on fait tourner la première autour de l'axe comme charnière, pour la rabattre sur la seconde.

Il est aisé de voir que la droite AA′ (fig. 11) menée par les deux foyers est un axe de l'ellipse. Car, si l'on considère les deux points M et M′ déterminés par l'intersection de deux cercles décrits des foyers F et F′ comme centres, on a deux triangles égaux FMF′, FM′F′, qui coïncident lorsqu'on fait tourner la partie supérieure de la droite AA′, pour la rabattre sur la partie inférieure ; le point M vient donc en M′; et comme il en est de même pour tous les points deux à deux, on voit que la demi-ellipse AMA′ s'applique exactement sur l'autre moitié AM′A′. Ainsi la droite AA′ est un axe de l'ellipse.

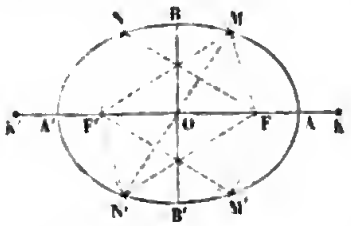


Fig. 11.

On appelle *sommets* les points A et A′ où l'axe coupe la courbe.

Nous avons, dans la construction de l'ellipse par points, porté sur l'axe, à partir du foyer F′, la longueur F′K égale à la somme constante. Le point A, milieu de FK, appartient à l'ellipse ; car, si l'on remplace la distance AF par son égale AK, on voit que la somme des distances AF′ et AF de ce point aux deux foyers est égale à la somme constante F′K ; ainsi le point A est l'un des sommets.

De même, si l'on porte sur l'axe, à partir de l'autre foyer F, la longueur FK′ égale à F′K, et si l'on prend le milieu de F′K′, on aura le second sommet A′. Les deux distances AF et A′F′ sont égales comme moitiés de distances égales FK, F′K′, et les deux sommets A et A′ sont également distants des deux foyers F et F′.

Il faut remarquer que *la longueur* AA′ *est égale à la somme constante des distances de chacun des points de l'ellipse aux deux foyers*. Car, si l'on remplace A′F′ par son égale AF ou AK, on voit que la longueur AA′ est égale à la somme constante F′K.

15—L'ellipse admet un second axe, la perpendiculaire BB′ élevée sur le milieu de la droite FF′. En effet, du foyer F′

comme centre, avec un rayon égal à FM, décrivons un premier cercle, et du foyer F avec un rayon égal à F'M un second cercle; ces deux cercles, par leur intersection, détermineront deux nouveaux points N et N' de l'ellipse. Les deux triangles FMF', F'NF sont égaux, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Faisons tourner la partie BAB' de la figure autour de BB' comme charnière, pour la rabattre de l'autre côté; la droite OF s'applique sur OF'; l'angle OFM étant égal a OF'N dans les deux triangles égaux, la droite FM prend la direction F'N; et, comme ces deux droites sont égales, le point M tombe en N. Ainsi, la partie BAB' s'applique exactement sur l'autre moitié BA'B', ce qui montre que la droite BB' est aussi un axe de l'ellipse.

On détermine les deux sommets B et B' par l'intersection de deux cercles égaux décrits des foyers comme centres, avec un même rayon égal à la moitié OA de AA'. Car, les deux distances BF et BF' étant égales entre elles, chacune d'elles est égale à la moitié de la somme constante, et par conséquent à la moitié de AA'. La longueur BB' est évidemment plus petite que AA'; et, en effet, la ligne droite BB' est plus petite que la ligne brisée BF + FB', qui est égale à AA'.

Les deux axes divisent l'ellipse en quatre parties égales.

16—On appelle *centre* d'une courbe un point tel que tous les points de la courbe sont situés deux à deux sur une droite passant par le centre, et à égale distance de part et d'autre.

Le point O, intersection des deux axes, ou milieu de la distance FF' des foyers, est centre de l'ellipse. En effet, soit M un point quelconque de l'ellipse; joignons MO et prolongeons cette droite d'une longueur ON' égale à OM; les deux diagonales FF', MN' se coupant mutuellement en deux parties égales, le quadrilatère FMF'N' est un parallélogramme, et les côtés opposés sont égaux. La somme des distances N'F + N'F' du point N' aux deux foyers étant égale à la somme MF' + MF, le point N' appartient aussi à l'ellipse. Ainsi, les deux points M et N' de l'ellipse sont situés sur une droite MN' passant par

le point O et à égale distance de part et d'autre. Il en est de même de tous les points deux à deux. Donc le point O est centre de l'ellipse.

17—La forme et les dimensions de l'ellipse dépendent de la distance FF′ des foyers et de la somme constante AA′. Nous avons vu comment on en déduit la longueur BB′. Inversement les deux longueurs AA′ et BB′, qui sont les portions des axes situés dans l'ellipse, et que, pour abréger, on appelle les axes de l'ellipse, peuvent servir à définir cette courbe. On commencera par déterminer les foyers (fig. 12). Pour cela, d'un sommet B du petit axe comme centre, avec un rayon égal au demi grand axe OA, on décrit une circonférence; les deux points F et F′, où cette circonférence coupe le grand axe, sont les foyers de l'ellipse : car on sait que la distance du sommet B à chacun des foyers est égale au demi grand axe. Une fois les foyers déterminés, on construit l'ellipse par points, ou bien on la trace d'un mouvement continu, comme nous l'avons expliqué.

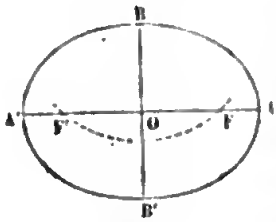


Fig. 12.

18—On appelle *excentricité* le rapport de la distance FF′ des foyers au grand axe AA′.

L'ellipse est une courbe fermée plus ou moins allongée; sa forme dépend de la grandeur de l'excentricité. Quand l'excentricité est nulle, les deux foyers se confondent avec le centre; la distance d'un point quelconque de l'ellipse au centre est constante, et l'ellipse se réduit rigoureusement à une circonférence de cercle. Quand l'excentricité est très-petite, les foyers sont très-rapprochés du centre; les deux axes diffèrent peu l'un de l'autre, l'ellipse est arrondie et peu différente d'un cercle. A mesure que l'excentricité augmente, en supposant le grand axe constant, les foyers s'écartent, le petit axe diminue, et l'ellipse prend une forme de plus en plus aplatie.

19. Cherchons maintenant l'équation de l'ellipse. Le sys-

tème de coordonnées indiqué par l'énoncé est le système bipolaire; si l'on détermine la position de chacun des points du plan par ses distances aux deux points fixes F et F′, l'ellipse aura pour équation

$$(1)\quad u+v=2a.$$

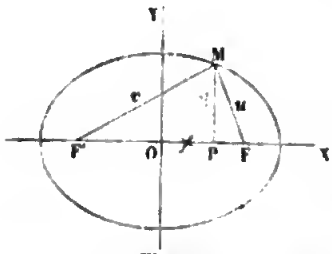


Fig. 13.

Voyons quelle est l'équation en coordonnées rectilignes. Prenons les deux axes de la courbe pour axes des coordonnées (fig. 13); désignons par $2c$ la distance FF′ des foyers, et remarquons que les longueurs PF et PF′ sont égales à $c-x$ et à $c+x$; les triangles rectangles FMP, F′MP donnent

$$u=\sqrt{y^2+(c-x)^2},$$
$$v=\sqrt{y^2+(c+x)^2}.$$

En substituant les valeurs de u et de v dans l'équation (1), on obtient l'équation :

$$\sqrt{y^2+(c-x)^2}+\sqrt{y^2+(c+x)^2}=2a.$$

Pour mettre cette équation sous forme entière, nous élèverons au carré, après avoir fait passer le premier radical dans le second membre, ce qui donne

$$y^2+(c+x)^2=4a^2+y^2+(c-x)^2+4a\sqrt{y^2+(c-x)^2},$$

ou, en simplifiant,

$$a\sqrt{y^2+(c-x)^2}=a^2-cx.$$

Une nouvelle élévation au carré conduit à l'équation

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2).$$

La somme constante $2a$ étant plus grande que la distance des foyers $2c$, on peut poser $a^2-c^2=b^2$, et l'équation de l'ellipse se met sous la forme

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

ou

$$(2)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

HYPERBOLE.

20—*L'hyperbole est une courbe telle que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes est constante.* Ces deux points fixes, F et F', sont les *foyers* de l'hyperbole.

Il est facile de construire l'hyperbole par points. Portez sur la droite F'F (fig. 14) une longueur F'K égale à la différence constante. Du foyer F' comme centre, avec différents rayons, décrivez une série de cercles. Soit D le point où l'un d'eux coupe la droite FF', prenez une ouverture de compas égale à KD, et, du foyer F comme centre, avec cette ouverture du compas, décrivez un second cercle ; ce cercle coupera le premier en deux points M et M', qui appartiennent à l'hyperbole ; car la différence des distances MF' et MF du point M aux deux foyers est égale à la différence des deux rayons F'D et KD, c'est-à-dire à la longueur donnée F'K. Répétez la même construction pour chacun des cercles décrits du foyer F' comme centre, et, quand vous aurez obtenu un assez grand nombre de points, vous ferez passer à la main un trait continu par tous ces points, et vous aurez un arc d'hyperbole MAM'.

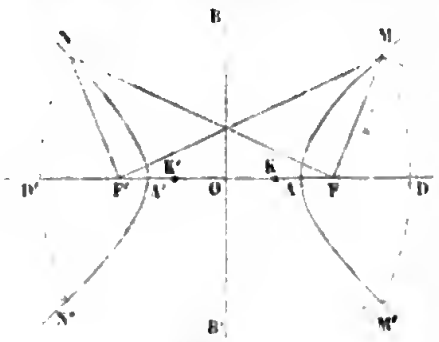


Fig. 14.

L'hyperbole se compose de deux branches indéfinies MAM', NA'N' ; pour la première, la distance MF' est plus grande que MF ; pour la seconde, la distance NF est, au contraire, plus grande que NF'. On obtient la seconde branche comme la première, en portant sur la droite FF' une longueur FK', égale à la différence constante, décrivant, du foyer F, comme centre, un cercle avec un rayon arbitraire FD', et, du foyer F' comme centre, un second cercle avec un rayon égal à F'D'.

21. On peut aussi décrire l'hyperbole d'un mouvement

continu. Supposons qu'une règle tourne autour du foyer F' et que les extrémités d'un fil soient attachées, d'une part au foyer F, d'autre part à l'extrémité G de la règle (fig. 15); si, en même temps que la règle tourne, un crayon glisse sur la règle en tenant le fil constamment tendu, ce crayon décrira un arc hyperbole. En effet, soit F'G' une position quelconque de la règle; le crayon a glissé sur la règle de G' en M, et le fil occupe alors la position G'MF. La différence des distances MF' et MF ne change pas, si l'on augmente ces deux longueurs de la même quantité G'M; elle est donc égale à la différence constante qui existe entre la longueur de la règle G'F' ou GF', et la longueur du fil G'MF ou GF.

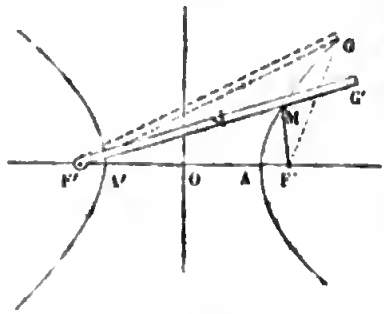


Fig. 15.

On obtiendrait la seconde branche en faisant tourner la règle autour du foyer F.

22. La droite FF' est un axe de la courbe; elle partage chacune des branches en deux parties symétriques; car les deux points M et M', ou N et N' (*fig.* 14), déterminés par l'intersection des deux cercles décrits des foyers comme centres, sont symétriques par rapport à cette droite. Les points A et A', où elle rencontre la courbe, sont les sommets de l'hyperbole.

On obtient les sommets A et A' en prenant le milieu de FK et de F'K'. La longueur AA' de l'axe est égale à la différence constante des distances de chacun des points de l'hyperbole aux deux foyers. Car, si l'on remplace A'F' par son égale AK, on voit que la différence constante F'K est égale à AA'.

L'hyperbole admet un second axe, la perpendiculaire BB', élevée sur le milieu de la droite FF'. Le raisonnement que nous avons fait pour l'ellipse (n° 15) montre, en effet, que les deux branches de courbe sont symétriques par rapport à cette droite. Mais ce second axe ne rencontre pas la courbe; c'est pourquoi on a donné au premier le nom d'axe *transverse*, au

second le nom d'axe non transverse. On voit aussi que le point O, milieu de la distance FF' des foyers, est centre de la courbe.

23. Dans le système bi-polaire, si l'on appelle u et v les distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers F et F', et $2a$ la différence constante, les deux branches de courbe ont respectivement pour équation

$$(1)\quad v-u=\pm 2a.$$

En coordonnées rectangulaires, si l'on prend pour axes des coordonnées les deux axes de la courbe, et que l'on désigne par $2c$ la distance FF', l'équation de la courbe est

$$\sqrt{y^2+(c+x)^2}-\sqrt{y^2+(c-x)^2}=\pm 2a.$$

Faisant subir à cette équation les mêmes transformations qu'à l'équation de l'ellipse, on arrive à la même équation

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2).$$

Cette équation convient à la fois à l'ellipse et à l'hyperbole; dans l'ellipse, la distance $2c$ des foyers est plus petite que la somme constante $2a$; dans l'hyperbole elle est, au contraire, plus grande que la différence constante $2a$. Si l'on pose $c^2-a^2=b^2$, l'équation de l'hyperbole prend la forme

$$(2)\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Il est bon de remarquer que, dans le système rectiligne, les deux branches de l'hyperbole sont comprises dans la même équation (2), tandis que, dans le système bi-polaire, l'une des branches est représentée par l'équation $v-u=2a$, et l'autre par l'équation $u-v=2a$.

PARABOLE.

24. *La parabole est une courbe dont chacun des points est également distant d'un point fixe nommé foyer et d'une droite fixe appelée directrice.*

Il est facile de construire la parabole par points. Soit F le foyer, DD′ la directrice (fig. 16); menez par le foyer une droite DB perpendiculaire à la directrice; le point A, milieu de FD, est un premier point de la parabole. Tracez une série de droites parallèles à la directrice, à une distance plus grande que AD. Soit P le point où l'une d'elles rencontre la droite DB; du foyer F, avec une ouverture de compas égale à DP, décrivez un cercle qui coupera la parallèle en deux points M et M′, appartenant à la parabole. Car la perpendiculaire ME abaissée du point M sur la directrice est égale à DP, et, par suite, au rayon MF; le point M, étant également distant du foyer et de la directrice, est un point de la parabole.

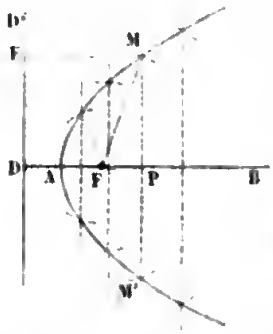


Fig. 16.

Répétez cette même construction pour chaque parallèle, et quand vous aurez déterminé ainsi un nombre suffisant de points, vous ferez passer à la main un trait continu par tous ces points.

La droite DB, menée par le foyer perpendiculairement à la directrice, est un axe de la parabole; car, d'après la construction, la corde MM′ est perpendiculaire sur DB et divisée au point P en deux parties égales. Si donc on fait tourner la partie supérieure de la parabole autour de la droite DB, pour la rabattre de l'autre côté; la droite PM s'appliquera sur PM′, le point M en M′. Comme il en est de même pour tous les points deux à deux, on voit que la partie supérieure coïncidera exactement avec la partie inférieure. Donc la droite DB est *axe* de la parabole.

Le point A, milieu de FD, est le *sommet* de la parabole.

La parabole n'est pas une courbe fermée comme l'ellipse; elle se compose d'une branche qui se prolonge indéfiniment. Les dimensions de la parabole dépendent de la distance du foyer à la directrice, distance que l'on appelle *paramètre* de la parabole; quand cette distance est très-petite, les deux branches de la parabole sont très-rapprochées l'une de l'autre. Elles

s'écartent et la parabole s'ouvre d'autant plus que ce paramètre est plus grand.

25—On peut aussi tracer la parabole d'un mouvement continu. Placez une règle sur la directrice DD' (fig. 17); appliquez contre la règle une équerre GHK; au sommet G attachez un fil d'une longueur égale au côté GH de l'équerre, l'autre extrémité étant attachée au foyer F; tendez le fil contre l'équerre avec un crayon, puis faites glisser l'équerre le long de la règle, et, en même temps, le crayon le long de l'équerre de manière à tenir le fil constamment tendu; vous décrirez un arc de parabole. En effet, soit M le point où se trouve le crayon quand l'équerre occupe la position GHK; la longueur du fil ou la ligne brisée GM+MF étant égale au côté GH de l'équerre, la distance MF égale MH, et, par conséquent, le point M appartient à la parabole.

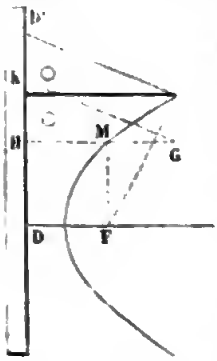


Fig. 17.

26—La définition de la parabole indique un système de coordonnées dont nous n'avons point encore parlé. On peut déterminer un point quelconque M du plan par ses distances MF et ME au foyer F et à la directrice DD' (fig. 18); la position du point M sera donnée par l'intersection d'un cercle décrit du foyer comme centre et d'une droite parallèle à la directrice. Si l'on appelle u et v les deux coordonnées du point M, la parabole aura pour équation dans ce système

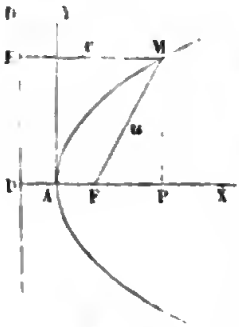


Fig. 18.

$$(1) \quad u = v.$$

Prenons maintenant pour origine des coordonnées rectilignes le sommet A de la parabole, pour axe des x l'axe AX de la parabole, et pour axe des y une perpendiculaire AY. En

désignant par p la distance FD du foyer à la directrice, on a

$$v = AP + AD = x + \frac{p}{2},$$

$$u = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2},$$

et l'équation de la parabole devient

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2},$$

ou

$$(2) \quad y^2 = 2px.$$

27—Avant d'aller plus loin nous dirons comment on définit la tangente à une courbe quelconque. En géométrie élémentaire, on appelle ordinairement tangente au cercle une droite indéfinie, qui n'a qu'un point commun avec la circonférence; mais cette définition n'étant pas susceptible d'être généralisée, il convient de définir la tangente d'une autre manière. Soit M un point donné sur une courbe (fig. 19); par ce point et un point voisin M', menons une droite indéfinie; imaginons maintenant que le point M' se rapproche indéfiniment du point M, la droite MM' tendra vers une position limite MT. C'est cette droite MT que l'on appelle tangente à la courbe au point M.

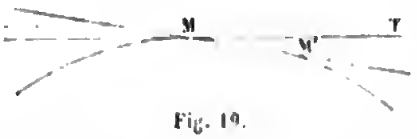
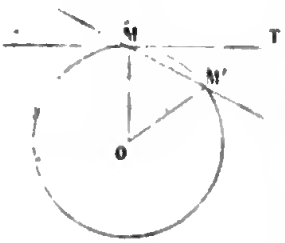


Fig. 19.

Il est aisé de voir, d'après cette définition, que la tangente au cercle au point M est perpendiculaire à l'extrémité du rayon OM; car, dans le triangle isocèle MOM', l'angle OMM' est égal à un angle droit, moins la moitié de l'angle au centre MOM'; quand le point M' se rapproche indéfiniment du point M, l'angle au centre tend vers zéro, et l'autre devient droit.



CISSOÏDE DE DIOCLÈS.

28—Étant donnés un cercle, un diamètre AB, une tangente

BC à l'extrémité de ce diamètre (fig. 20); si du point A on mène une sécante mobile AE, sur laquelle on porte à partir du point A une longueur AM égale à la portion DE de la sécante comprise entre le cercle et la tangente fixe, le lieu du point M est une courbe qui porte le nom de *Cissoïde*.

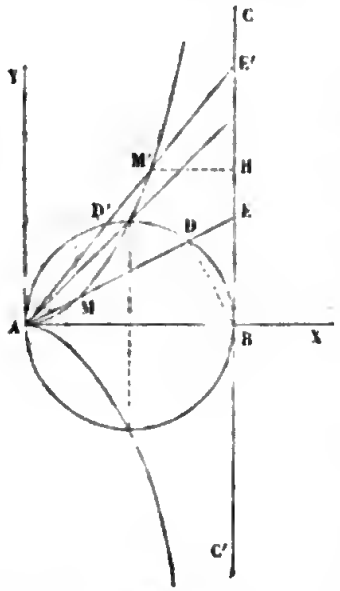


Fig. 20.

Si l'on suppose que la sécante mobile parte de la position AB et tourne autour du point A, de AX vers la perpendiculaire AY, la longueur DE et par suite AM augmentera indéfiniment ; le point M décrira une branche de courbe infinie AMM'. Si l'on fait tourner la sécante mobile de l'autre côté de AB, on obtiendra évidemment une seconde branche égale à la première.

La droite AB est un axe de la courbe, puisque les deux branches sont symétriques par rapport à cette droite. Le point A est un sommet.

La tangente aux deux branches au sommet A coïncide avec l'axe. Car, si la sécante AM tourne autour du point A de manière à ce que la corde AM ou DE devienne nulle, elle tend vers la position limite AB; donc AB est la tangente en A.

On peut voir aussi que les deux branches de courbe se rapprochent indéfiniment de la droite CC'. En effet, considérons la sécante dans la position AE'; si de la longueur totale AE' on retranche alternativement les deux longueurs égales AM' et D'E', on a M'E'=AD'. La corde AD' diminuant de plus en plus et tendant vers zéro, il en est de même de la longueur M'E', et, à plus forte raison, de la perpendiculaire M'H. Cette droite CC', dont la courbe se rapproche indéfiniment, s'appelle une *asymptote*.

La cissoïde a été imaginée par le géomètre grec Dioclès,

pour résoudre le problème de la construction de deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données.

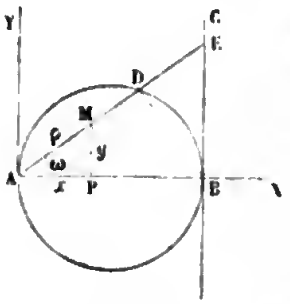


Fig. 21.

29—Cherchons l'équation de la cissoïde en coordonnées polaires; prenons le point A pour pôle et la droite AB pour axe polaire. Appelons a le diamètre du cercle donné, ρ et ω les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe (fig. 21). Dans les triangles rectangles ABE, ABD, on a

$$AE=\frac{a}{\cos\omega},\quad AD=a\cos\omega;$$

d'où

$$\rho=DE=AE-AD=\frac{a}{\cos\omega}-a\cos\omega=\frac{a\sin^2\omega}{\cos\omega}.$$

Ainsi la cissoïde est représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$(1)\quad \rho=\frac{a\sin^2\omega}{\cos\omega}.$$

Cherchons maintenant l'équation en coordonnées rectilignes; prenons le point A pour origine, la droite AB pour axe des x et une perpendiculaire pour axe des y. Dans le triangle rectangle MAP on a

$$x=\rho\cos\omega,\quad y=\rho\sin\omega,\quad \rho^2=x^2+y^2;$$

si, dans l'équation (1), on remplace d'abord $\cos\omega$ par $\frac{x}{\rho}$, $\sin\omega$ par $\frac{y}{\rho}$, ce qui donne

$$\rho^2 x=a y^2,$$

puis ρ^2 par x^2+y^2, on arrive à l'équation de la cissoïde en coordonnées rectilignes

$$(2)\quad y^2(a-x)-x^3=0.$$

30—Proposons-nous de construire, au moyen de son équa-

tion en coordonnées rectilignes, la cissoïde que nous avons déjà construite d'après sa définition géométrique.

En résolvant l'équation par rapport à y, on a

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

L'ordonnée n'est réelle que pour les valeurs de l'abscisse comprises entre 0 et a; donc la courbe est située tout entière entre l'axe des y et la parallèle CC′ menée à la distance a (fig. 20). Quand x croît de 0 à a, la valeur numérique de y croît de 0 à ∞; ce qui donne une branche de courbe supérieure partant de l'origine A et s'élevant indéfiniment. En même temps la distance $M'H = a - x$ d'un point de la courbe à la droite BC tend vers zéro, ce qui fait voir que la droite BC est asymptote de la courbe.

Comme à chaque valeur de x correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires, la courbe se compose de deux branches symétriques par rapport à l'axe AX.

STROPHOÏDE.

31—Un angle droit YOX (fig. 22) et un point fixe A sur un de ses côtés étant donnés dans un plan, on mène du point fixe A une droite quelconque AD qui rencontre le côté OY en D, et l'on porte sur cette droite d'un côté et de l'autre à partir du point D des longueurs DM et DN égales à OD; le lieu des points M et N est la *strophoïde*.

Quand la droite mobile occupe la position AX, les deux points M et N se confondent en O. Si la droite tourne de manière à ce que le point D s'élève indéfiniment sur OY, OD augmente, et l'on voit que le point M décrit une branche de courbe infinie OM. Quant au point N, il se rapproche de plus en plus de A. En effet, on obtient le point N en décrivant un cercle du point D comme centre avec DO pour rayon; quand le point D s'élève à l'infini, l'arc de cercle ON coïncide avec la droite OA, et le point N vient en A.

Il y a évidemment une partie symétrique de l'autre côté de l'axe AX (fig. 22).

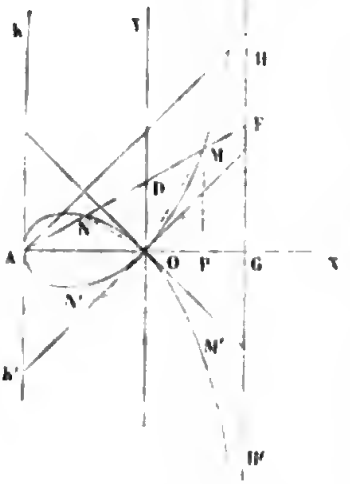


Fig. 22.

Le point O par lequel passent les deux branches de courbe s'appelle *point multiple*. Les tangentes en ce point aux deux branches de courbes coïncident avec les bissectrices des angles droits AOY, YOX; car, dans le triangle isocèle DMO, l'angle D est obtus et par suite l'angle DOM plus petit que 45°; si la droite AD tend vers la position AX, l'angle D diminue jusqu'à 90°, et par conséquent l'angle DOM augmente jusqu'à 45°; donc la position limite de OM, c'est-à-dire la tangente en O, coïncide avec la bissectrice. On en conclut en outre que la branche OM est située au-dessus de la tangente. Le triangle isocèle DON donne le même résultat; car, dans ce triangle, l'angle D est aigu, et l'angle DON plus grand que 45°; quand la droite AD tend vers AX, l'angle D augmente jusqu'à 90° et l'angle DON diminue jusqu'à 45°; donc la position limite de ON, ou la tangente, coïncide avec la bissectrice, et l'arc est au-dessous de sa tangente.

La tangente au sommet A est perpendiculaire sur l'axe AX; car, lorsque le point D s'élève indéfiniment, la corde AN tend à devenir perpendiculaire sur AX.

Sur le prolongement de AO prenons OG=AO, et par le point G élevons la perpendiculaire H'H; cette droite est asymptote de part et d'autre aux deux branches infinies de la courbe; car la distance MF, égale à AN, tend vers zéro.

32—Cherchons l'équation de la courbe en coordonnées polaires. Prenons le point A pour pôle, l'axe AX pour axe polaire, et désignons par a la distance OA, on a

$$\rho = AD \pm DM = AD \pm DO = \frac{a}{\cos\omega} \pm a \operatorname{tang}\omega;$$

d'où

$$(1)\quad \rho = \frac{a(1 \pm \sin\omega)}{\cos\omega}.$$

Prenons pour axes des coordonnées rectilignes les deux côtés OX et OY de l'angle droit; dans le triangle rectangle AMP, on a

$$a + x = \rho\cos\omega,\ y = \rho\sin\omega,$$
$$\rho^2 = y^2 + (a+x)^2;$$

si, dans l'équation (1), on remplace $\sin\omega$ et $\cos\omega$ par leurs valeurs $\frac{y}{\rho}$ et $\frac{a+x}{\rho}$, ce qui donne

$$\rho x = \pm a y,$$

puis ρ^2 par sa valeur, on obtient l'équation en coordonnées rectilignes

$$y^2(a^2 - x^2) - x^2(a+x)^2 = 0,$$

et, en divisant par $a + x$,

$$(2)\quad y^2(a-x) - x^2(a+x) = 0.$$

33—Proposons-nous maintenant de construire la courbe au moyen de son équation en coordonnées rectilignes. L'équation (2), résolue par rapport à y, donne

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

Pour que l'ordonnée y soit réelle, il faut que la quantité placée sous le radical soit positive; quand on donne à x des valeurs positives, le numérateur étant positif, le dénominateur doit être aussi positif, ce qui exige que x soit plus petit que a. Quand on donne à x des valeurs négatives, le dénominateur étant positif, le numérateur doit être aussi positif, ce qui exige que la valeur absolue de x soit moindre que a. Ainsi l'abscisse x ne peut varier que de $-a$ à $+a$; si donc on porte sur l'axe des x, à partir de l'origine, et de part et d'autre, des longueurs OG et OA égales à a, et que par les points G et A on mène des parallèles HH', KK' à l'axe des y, la courbe sera tout

entière comprise entre ces deux parallèles. On verra la forme de la courbe en suivant la variation de la fonction

$$y = x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

Quand x varie de $-a$ à 0, l'ordonnée y est négative et conserve des valeurs finies; elle s'annule pour $x=-a$ et aussi pour $x=0$; il en résulte une branche de courbe AN'O, située au-dessous de l'axe des x, partant du point A, et aboutissant au point O. Quand x varie de 0 à $+a$, l'ordonnée y est positive et croît de 0 à ∞ ; il en résulte une branche OM, qui part de l'origine et qui s'élève indéfiniment, en se rapprochant de plus en plus de la droite HH', qui est une asymptote; cette branche OM fait suite à la branche AN'O.

En changeant le signe du radical, on obtient une branche ANOM' symétrique de la première par rapport à l'axe des x.

LIMAÇON DE PASCAL.

34—Par un point A pris sur un cercle, on mène un sécante quelconque AD, sur laquelle à partir du point D, où elle rencontre le cercle, on porte de part et d'autre des longueurs constantes DM, DN; le lieu des points M et N (fig. 23) est une courbe nommée *limaçon de Pascal.*

Considérons spécialement le cas où la longueur constante a est plus petite que le diamètre b du cercle. Supposons que AD parte de la position AB; sur cette droite, prenons BG=BH=a, deux branches partiront l'une de G, l'autre de H. Quand AD tourne autour du point A, comme la corde AD diminue, les points M et N se rapprochent tous deux du point A. Il arrive

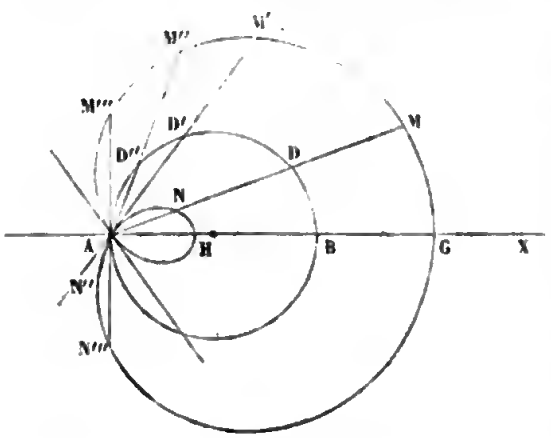


Fig. 23.

un moment où la corde AD′ est égale à a; alors le point M vient en M′, le point N en A; on voit de plus que la branche HNA est tangente en A à la droite AD′; car, lorsque AD tend vers AD′, la corde AN devient nulle, et le point N se confond avec A.

Quand la sécante continue à tourner et occupe une position telle que AD″, le point M vient en M″; mais comme D″A est plus petite que a, le point N dépasse A et vient en N″.

Lorsque la sécante a tourné d'un angle droit, AD devient nulle, et l'on a AM‴=AN‴=a. Ainsi quand la sécante tourne d'un angle droit à partir de AB, les points M et N engendrent deux arcs, l'un GMM‴, l'autre HNAN‴. Si la sécante tourne d'un angle droit de l'autre côté de AB, on aura deux arcs symétriques des premiers par rapport à l'*axe* AB, et qui se raccorderont avec ceux-ci, de manière à former une courbe continue.

35—Si l'on prend A pour pôle, et AB pour axe polaire, on a

$$\rho = AD \pm a = b \cos \omega \pm a.$$

Pour que cette équation représente la partie AN″N‴ de la courbe, il faut convenir de porter les valeurs négatives de ρ sur le prolongement en sens inverse de la direction déterminée par l'angle ω. Mais nous verrons plus tard que, grâce à cette convention, l'équation

$$(1)\quad \rho = b \cos \omega + a$$

représente la courbe tout entière.

En coordonnées rectilignes, si l'on prend le point A pour origine, le diamètre AB pour axe des x, une perpendiculaire pour axe des y, l'équation de la courbe est

$$(2)\quad (x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2 (x^2 + y^2).$$

On l'obtient en remplaçant dans l'équation (1) $\cos \omega$ par sa valeur $\frac{x}{\rho}$, puis ρ^2 par $x^2 + y^2$ (n° 29), et élevant au carré pour faire disparaître le radical.

36—On obtient cette même courbe par un autre procédé.

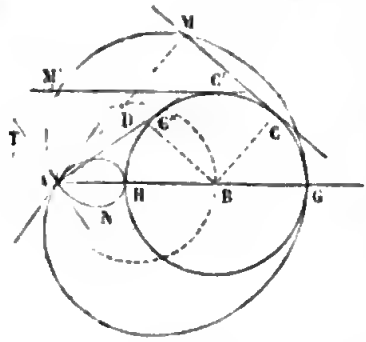


Fig. 24.

Étant donné une cercle GH et un point fixe A, imaginons qu'une tangente mobile CM roule sur le cercle, et du point A abaissons une perpendiculaire AM sur cette tangente (fig. 24). Cherchons le lieu du point M.

Supposons que la tangente touche d'abord le cercle en G; alors la perpendiculaire abaissée du point A coïncide avec le diamètre AG et le point G est un point du lieu. La tangente roulant sur le quart de cercle GCC', le point M décrit l'arc de courbe GMM'. La tangente s'incline ensuite jusqu'à la position C''A, et l'on a l'arc de courbe M'A. La tangente continuant son mouvement suivant C''H, le pied de la perpendiculaire tombe au-dessous du diamètre et l'on a l'arc de courbe ANH. Nous avons fait rouler la tangente sur le demi-cercle GC'H; en la faisant rouler sur le demi-cercle inférieur, on obtiendra une partie symétrique de la première.

37—Il est facile de construire géométriquement la tangente en un point quelconque M de la courbe (fig. 25); soient CM et C'M' deux tangentes voisines du cercle, L leur point de rencontre, AM et AM' les perpendiculaires abaissées du point A sur ces tangentes; la circonférence décrite sur AL comme diamètre passe par les deux points M et M', et la sécante MM' de la courbe est aussi une sécante de ce cercle. Si maintenant on suppose que le point C' se rapproche indéfiniment du point C, le point M' se rapprochera du point M; le diamètre AL devient AC; la sécante MM' devient tangente en M au cercle décrit sur le diamètre AC. Ainsi, en joignant le point M au milieu D de AC et menant une perpendiculaire MT à DM, on aura la tangente à la courbe au point M. Au point multiple A (fig. 24),

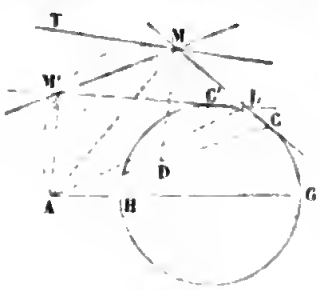


Fig. 25.

les tangentes aux deux branches de courbe qui passent en ce point sont respectivement perpendiculaires aux tangentes telles que AC″ menées de ce point au cercle donné.

Nous ferons remarquer que la construction géométrique de la tangente resterait la même, si l'on considérait le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée d'un point fixe sur la tangente mobile à une courbe quelconque.

38—Cherchons l'équation de cette courbe en coordonnées polaires ; prenons le point A pour pôle, le diamètre AG pour axe polaire (fig. 24), et désignons par a le rayon BG du cercle donné, et par b la distance AB. Si par le centre B du cercle, on mène une parallèle BD à la tangente CM, on a

$$\rho = AD + DM = b \cos \omega + a.$$

Cette équation est la même que l'équation (1), d'où l'on conclut l'identité des deux courbes.

Au reste, il est facile de reconnaître géométriquement cette identité. L'angle D étant droit, le lieu du point D est le cercle décrit sur AB comme diamètre ; on obtiendra donc le point M en prolongeant la corde AD d'une quantité constante DM égale à BC.

ROSACE A QUATRE BRANCHES.

39—Étant données deux droites rectangulaires OX, OY, sur lesquelles glissent les extrémités d'une droite PQ de longueur constante, du point O on abaisse une perpendiculaire OM sur cette droite ; étudier le lieu du point M (fig. 26).

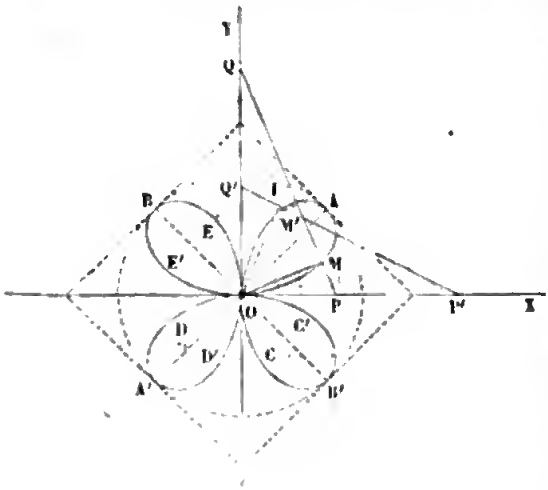


Fig. 26.

Quand la droite PQ s'applique sur OY, le point M vient en O, et la corde OM

prend la direction OX; donc la tangente en O à l'arc OM coïncide avec OX. Le point I, milieu de PQ, décrit un cercle dont le centre est en O, et le rayon égal à a, si l'on désigne par $2a$ la longueur constante PQ. Or la perpendiculaire OM est plus petite que l'oblique OI; donc la distance OM est maximum quand la droite PQ est perpendiculaire sur la bissectrice OA. Lorsque la droite mobile continue son mouvement, elle passe par une position P'Q' symétrique de PQ par rapport à la bissectrice OA, et l'on obtient un arc OM'A symétrique de l'arc OMA.

La même courbe se reproduit dans chacun des quatre angles droits. Ainsi la courbe a *quatre axes*, savoir : les deux droites fixes OX, OY, et les deux bissectrices à OA, OB. Le point O est *centre* de la courbe.

Si l'on prend le point O pour pôle, et OX pour axe polaire, on a, dans les triangles rectangles OMP, OPQ,

$$\rho = \mathrm{OP} \cos\omega,$$
$$\mathrm{OP} = 2a \sin\omega;$$

donc

$$(1) \quad \rho = a \sin 2\omega.$$

En coordonnées rectilignes, la courbe est représentée par une équation du sixième degré.

$$(2) \quad (x^2+y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0.$$

CHAPITRE III.

De l'Homogénéité.

10 — DÉFINITIONS. — On dit qu'une fonction $f(a, b, c, \ldots)$ est *homogène*, par rapport aux lettres $a, b, c, \ldots$ lorsque, en remplaçant a par ka, b par $kb, \ldots$ on a

$$f(ka, kb, kc, \ldots) = k^m f(a, b, c, \ldots);$$

l'exposant m est le degré de la fonction homogène.

Telles sont, par exemple, les fonctions

$$a^2+2ab, \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{c}\sin\frac{c}{a}}{a+b}, \quad \frac{a+\sqrt{ab}}{a+c}, \quad \frac{a}{a^3-b^3};$$

le degré de la première est 2, celui de la seconde $\frac{1}{2}$, celui de la troisième 0, et celui de la quatrième —2.

41—On voit aisément :

1° Que la somme ou la différence de deux fonctions homogènes du même degré est une fonction homogène du même degré que les fonctions proposées ;

2° Que le produit de plusieurs fonctions homogènes de degrés quelconques est une fonction homogène dont le degré est égal à la somme des degrés des fonctions proposées ;

3° Que le quotient de deux fonctions homogènes est une fonction homogène dont le degré est égal à l'excès du degré du dividende sur le degré du diviseur ;

4° Que la puissance d'une fonction homogène est une fonction homogène dont le degré est égal au degré de la fonction proposée multiplié par l'indice de la puissance ;

5° Que la racine d'une fonction homogène est une fonction homogène dont le degré est égal au degré de la fonction proposée divisé par l'indice de la racine ;

6° Qu'une fonction transcendante d'une fonction homogène de degré 0 est elle-même homogène et de degré 0. Par exemple, les fonctions

$$\sin\left(\frac{ab}{a^2+b^2}\right), \log\left(\frac{b+\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}\right)$$

sont homogènes et de degré 0 ; car si on remplace a et b par ka et kb, la lettre k disparaît de dessous le signe transcendant et on peut mettre en avant le facteur k^0. Mais si la quantité placée sous le signe transcendant, quoique homogène, n'était pas du degré 0, la lettre k ne pourrait se mettre en facteur en avant du signe transcendant et la fonction ne serait pas homogène. Ainsi la fonction $\sin(a+\sqrt{bc})$ n'est pas homogène.

Lorsqu'un monôme est rationnel et entier par rapport aux lettres $a, b, c...$, on appelle degré du monôme, par rapport à une lettre, l'exposant de cette lettre dans le monôme; degré du monôme, par rapport à plusieurs lettres, la somme des exposants de ces lettres. Un monôme est toujours une fonction homogène d'un degré égal au degré du monôme : donc la somme de plusieurs monômes de même degré est un polynôme homogène de ce même degré. Par exemple, le polynôme

$$a^3-4a^2b+5ab^2-2b^3$$

est une fonction homogène du troisième degré, par rapport aux lettres a et b.

42—Lorsqu'on cherche les relations qui existent entre les longueurs des diverses lignes A, B, C,... d'une figure, on imagine ces lignes rapportées à une unité de longueur, qui ordinairement n'est pas spécifiée et reste tout à fait arbitraire. Désignons par les lettres $a, b, c,...$ les nombres qui expriment ainsi les mesures des lignes de la figure, et supposons que l'on ait trouvé entre ces nombres la relation

$$(1)\quad f(a,b,c,...)=0.$$

Les raisonnements que l'on a faits pour arriver à cette relation étant indépendants de l'unité de longueur, il est évident que cette relation doit subsister, quelle que soit cette unité. Appelons $\alpha, \beta, \gamma,...$ les valeurs particulières de $a, b, c,...$ pour une première unité; $\alpha', \beta', \gamma',...$ les valeurs de ces mêmes quantités pour une autre unité; ces deux séries de nombres vérifient les relations

$$(2)\quad f(\alpha,\beta,\gamma,...)=0,$$

$$(3)\quad f(\alpha',\beta',\gamma',...)=0.$$

Mais quand on change l'unité, les nombres varient proportionnellement, de sorte que si l'on désigne par k le rapport de la première unité à la seconde, on a

$$\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{\beta'}{\beta}=\frac{\gamma'}{\gamma}.....=k;$$

d'où,

$$\alpha'=k\alpha,\ \beta'=k\beta,\ \gamma'=k\gamma,..$$

Si l'on substitue dans la relation (3), il vient

$$(4)\quad f(k\alpha,\ k\beta,\ k\gamma,\ldots)=0.$$

Concevons que la première unité restant fixe, la seconde varie, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ seront des nombres constants, k un nombre arbitraire, et l'équation (4) devra être vérifiée quel que soit ce nombre k.

Ainsi : *si l'équation* (1) *est vérifiée quand on y remplace les lettres* a, b, c,... *par les nombres* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *elle sera aussi vérifiée quand on y remplacera ces mêmes lettres par* $k\alpha$, $k\beta$, $k\gamma$,... *quel que soit le nombre* k.

43—La condition précédente est évidemment remplie lorsque le premier membre de l'équation (1) est une fonction homogène des lettres $a, b, c, \ldots$; car alors on a

$$f(k\alpha,\ k\beta,\ k\gamma,\ldots)=k^m f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots);$$

si $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ est nul, il en sera de même de $f(k\alpha, k\beta, k\gamma, \ldots)$, quel que soit k.

Nous allons démontrer que, réciproquement, l'homogénéité est nécessaire, en nous bornant aux équations algébriques mises sous forme entière.

Supposons que $f(a, b, c, \ldots)$ soit un polynôme entier; si tous ses termes ne sont pas du même degré, réunissons par groupes les termes dont le degré est le même; appelons $\varphi(a, b, c, \ldots)$ l'ensemble des termes du degré le plus élevé m, $\psi(a, b, c, \ldots)$ l'ensemble des termes du degré n, etc., l'équation (4) devient

$$k^m \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) + k^n \psi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) + \ldots = 0.$$

Pour que cette équation soit vérifiée, quel que soit k, il est nécessaire que l'on ait séparément

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)=0,\quad \psi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)=0, \ldots\ldots$$

Comme l'unité à laquelle se rapportent les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ est arbitraire, on a entre les lignes de la figure les relations homogènes

$$\varphi(a, b, c, \ldots)=0,\quad \psi(a, b, c, \ldots)=0, \ldots.$$

Donc, *si l'équation* (1) *n'est pas homogène, elle équivaut à plusieurs équations homogènes séparément.*

44—Cependant il peut arriver qu'une équation non homo-

gène soit vérifiée, quand on fait choix d'une unité particulière, sans que les parties qui la composent soient nulles séparément; mais alors, si l'on change l'unité, l'équation cesse d'être vérifiée.

Expliquons ceci par un exemple.

Proposons-nous de déterminer les dimensions d'un cylindre de telle sorte que sa surface soit équivalente à celle d'une sphère de rayon donné A et son volume à celui d'une sphère de rayon B.

Soient X le rayon et Y la hauteur du cylindre; appelons a, b, x, y les mesures des lignes A, B, X, Y, rapportées à une unité quelconque; les inconnues devront satisfaire aux deux équations

$$(5)\quad x^2+xy-2a^2=0,$$

$$(6)\quad x^2y-\frac{4}{3}b^3=0.$$

Chacune de ces équations est homogène : l'une est du second degré, l'autre du troisième. Si elles sont vérifiées quand on rapporte les lignes à une certaine unité, il en sera de même quand on les rapportera à une autre unité.

Les inconnues x et y doivent également satisfaire à l'équation non homogène

$$(7)\quad (x^2+xy-2a^2)+\left(x^2y-\frac{4}{3}b^3\right)=0,$$

que l'on obtient en ajoutant les précédentes membre à membre.

Considérons l'équation (7), abstraction faite de son origine. On peut trouver quatre lignes A, B, X, Y, telles que, si on les mesure avec une unité particulière, les nombres obtenus vérifient cette équation sans annuler séparément les deux parties; supposons, par exemple, que les lignes rapportées à une première unité aient pour mesure les quatre nombres $a=1$, $b=3$, $x=1$, $y=18,5$, dont trois ont été pris arbitrairement et le quatrième déterminé ensuite par l'équation (7); si on mesure les mêmes lignes avec une unité deux fois plus petite, on obtient les nombres $a=2$, $b=6$, $x=2$, $y=37$ qui ne satisfont plus à l'équation. Le cylindre construit avec les lignes X et Y ainsi

déterminées jouit de cette propriété que la somme des nombres qui, avec l'unité choisie, expriment les mesures de sa surface et de son volume, est égale à la somme des nombres qui expriment les mesures de la surface d'une sphère et du volume d'une autre sphère; mais la même relation n'a plus lieu quand l'unité linéaire change.

L'équation (7) ne peut être vérifiée par les mesures des mêmes lignes, quand on fait varier arbitrairement l'unité de longueur, qu'autant que ces lignes satisfont aux équations (5) et (6) prises isolément.

45—Dans la résolution des problèmes de géométrie on ne fait jamais de combinaisons d'équations analogues à la précédente. Les équations que donnent immédiatement les théorèmes de la géométrie élémentaire sont homogènes; et, quand on ajoute deux équations membre à membre, c'est afin d'obtenir une nouvelle équation plus simple que l'une des proposées; pour cela, il faut d'abord que les équations que l'on ajoute soient du même degré. Le principe de l'homogénéité pourra donc servir à chaque instant à vérifier les transformations algébriques effectuées.

46—Lorsqu'on prend pour unité de longueur une des lignes de la figure, les équations cessent d'être homogènes; mais il est facile de rétablir l'homogénéité. Soit

$$(8)\quad F(b', c', \ldots) = 0,$$

l'équation obtenue en prenant pour unité la ligne A, les lettres b', c',... désignant les mesures des lignes B, C,... rapportées à A. Laissons l'unité arbitraire et appelons a, b, c,... les mesures des lignes A, B, C...; on a

$$\frac{1}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \ldots,$$

d'où

$$b' = \frac{b}{a},\ c' = \frac{c}{a}, \ldots,$$

et l'équation (8) se transforme dans la suivante

$$(9)\quad F\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots\right) = 0,$$

qui est homogène.

Ainsi, par exemple, si l'on rapporte les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle à l'hypoténuse de ce triangle prise pour unité, les mesures des côtés vérifient l'équation non homogène

$$b'^2 + c'^2 = 1,$$

de laquelle on déduit l'équation homogène

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1 \quad \text{ou} \quad b^2 + c^2 = a^2,$$

en remplaçant b' par $\frac{b}{a}$ et c' par $\frac{c}{a}$.

Les courbes, ellipse, hyperbole, parabole, cissoïde, etc., étudiées dans le chapitre précédent, sont définies chacune par une équation homogène. Une équation homogène quelconque

$$f(x, y, a, b, c, \ldots) = 0,$$

entre les coordonnées x et y d'un point du plan et les longueurs a, b, c... de diverses droites, détermine une courbe, dont la position et les dimensions sont indépendantes de l'unité avec laquelle on mesure les lignes. Considérons au contraire une équation numérique entre x et y,

$$f(x, y) = 0,$$

c'est-à-dire une équation ne renfermant pas d'autres lettres que x et y, et supposons cette équation non homogène. Pour représenter par des points du plan les solutions réelles de cette équation, il faut commencer par choisir arbitrairement une échelle ou la ligne dont la longueur a pour mesure l'unité. Or, quand l'échelle varie, la ligne ne reste plus la même, nous verrons plus tard que les diverses courbes ainsi obtenues ont des analogies remarquables; ce sont des courbes qu'on appelle *homothétiques*.

47—REMARQUE I. Il arrive souvent que l'on considère dans une même question des nombres qui expriment des mesures de ligne, de surface et de volume; les unités de surface et

de volume restent, comme l'unité de ligne, indéterminées; mais on suppose habituellement qu'il existe entre elles cette relation, que l'unité de surface est le carré construit sur l'unité de longueur et l'unité de volume le cube construit sur la même droite. Dans ce cas, pour vérifier l'homogénéité d'une relation dans laquelle certaines lettres, S et V, désignent la mesure d'une surface ou d'un volume, on remplacera ces lettres par p^2 et q^3, en désignant par p et q les côtés du carré ou du cube équivalents à la surface ou au volume considéré; de cette manière l'équation ne contiendra plus que des lignes. On peut aussi se dispenser de faire cette substitution, et alors, dans l'évaluation du degré de chaque terme, on double l'exposant des lettres qui désignent des surfaces, et on triple ceux des lettres qui désignent des volumes.

48—REMARQUE II. En général, lorsque des angles entrent dans un calcul, ces angles sont rapportés à une unité complétement déterminée et leurs mesures sont des nombres fixes. Pour évaluer un angle, on décrit de son sommet comme centre avec un rayon arbitraire un arc de cercle et on prend le rapport de cet arc au rayon, ce qui revient à prendre pour unité d'angle celui dans lequel l'arc est égal au rayon. Les fonctions trigonométriques des angles sont également des nombres. Dans l'application du principe de l'homogénéité, on fera abstraction des lettres qui désignent des angles ou leurs fonctions trigonométriques.

CHAPITRE IV.

Transformation des Coordonnées.

Quand on connaît l'équation d'une ligne par rapport à certaines coordonnées, il importe de pouvoir en déduire l'équation de la même ligne par rapport à d'autres coordonnées.

Pour résoudre cette question d'une manière générale, il faut trouver des formules qui expriment les coordonnées d'un

point quelconque du plan dans un certain système, au moyen des coordonnées du même point dans un autre système.

Nous nous occuperons en premier lieu de la transformation des coordonnées rectilignes en d'autres coordonnées rectilignes.

DÉPLACEMENT DE L'ORIGINE.

49—Supposons d'abord que l'on remplace les deux axes OX et OY par d'autres axes O'X' et O'Y' respectivement parallèles aux premiers (fig. 27) et de même sens. La position des nouveaux axes sera déterminée par les coordonnées a et b de la nouvelle origine O' relativement aux axes primitifs. Nous appellerons x et y les coordonnées d'un point quelconque M du plan relativement aux premiers axes, x' et y' les coordonnées du même point relativement aux nouveaux axes. Imaginons qu'un mobile aille du point O au point M en suivant la ligne droite OM ou la ligne brisée OO'M, et projetons ces deux chemins sur l'axe OX parallèlement à OY. La projection de la droite OM, avec le signe qui lui convient, est l'abscisse x du point M ; la projection de la droite OO' est l'abscisse a du point O'; la projection de la droite O'M sur OX ou sur l'axe parallèle O'X' est la nouvelle abscisse x'. Les projections des deux chemins étant égales entre elles, on a l'équation $x=a+x'$. En projetant sur l'axe OY, on a de même l'équation $y=b+y'$. On obtient ainsi les deux relations

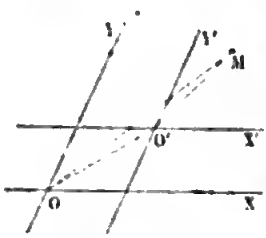


Fig. 27.

$$(1)\quad \begin{cases} x=a+x', \\ y=b+y', \end{cases}$$

entre les anciennes et les nouvelles coordonnées du point M. Ces relations sont vraies quelle que soit la position du point M dans le plan. On en déduit

$$(2)\quad \begin{cases} x'=x-a, \\ y'=y-b. \end{cases}$$

CHANGEMENT DE LA DIRECTION DES AXES.

50—Supposons maintenant que l'on change la direction des axes en conservant la même origine. Nous traiterons d'abord un cas particulier qui se présente souvent dans la pratique, celui où les axes des deux systèmes sont rectangulaires.

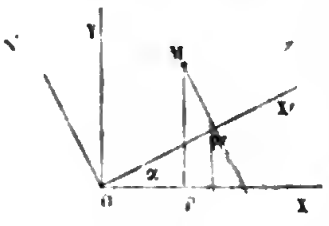


Fig. 28.

Imaginons que l'on change la direction des axes en faisant tourner l'angle droit XOY (fig. 28) d'un certain angle α autour de l'origine pour l'amener dans la position X'OY', et considérons l'angle α comme positif, si la rotation s'effectue de OX vers OY, et comme négatif, si la rotation s'exécute en sens inverse.

Par un point quelconque M du plan menons des parallèles MP et MP' aux axes OY et OY', désignons par x et y les coordonnées du point M par rapport aux premiers axes, et par x' et y' les coordonnées du même point par rapport aux nouveaux axes. Les projections des deux chemins OPM, OP'M sur un axe quelconque sont égales. Projetons d'abord sur l'axe OX; la projection de la longueur OP est cette longueur elle-même, prise avec le signe + ou le signe —, suivant qu'elle est portée dans la direction OX, ou dans la direction opposée; c'est dans tous les cas l'abscisse x; PM étant perpendiculaire sur OX, sa projection est nulle; la projection du premier chemin se réduit donc à x. Projetons maintenant le chemin OP'M; et d'abord projetons le premier côté OP'; si la longueur OP' est portée sur OX', il faut la multiplier par $\cos\alpha$, ce qui donne la projection $OP' \times \cos\alpha$; si cette longueur est portée en sens inverse, il faut la multiplier par $\cos(\alpha + \pi)$, ce qui donne $OP' \times \cos(\alpha + \pi)$ ou $-OP' \times \cos\alpha$; mais, dans le premier cas, on a $x' = OP'$; dans le second cas, $x' = -OP'$; ainsi la projection du côté OP' est toujours exprimée par $x' \cos\alpha$. Considérons le second côté P'M; s'il est dirigé dans le sens OY', il fait avec OX' l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$, et sa projection est

$P'M \times \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$; s'il est dirigé en sens inverse, il fait avec OX l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi$, et sa projection est $-P'M \times \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$; mais on a, dans le premier cas, $y' = P'M$, dans le second cas, $y' = -P'M$; ainsi, la projection de P'M est toujours exprimée par $y' \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, de sorte que le chemin OP'M a pour projection

$$x' \cos\alpha + y' \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

ou

$$x' \cos\alpha - y' \sin\alpha.$$

En égalant les projections des deux chemins OPM, OP'M, on obtient l'équation

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha.$$

Projetons ensuite sur l'axe OY. La projection de OP est nulle : celle de PM, prise avec le signe convenable, est y; ainsi la projection du premier chemin se réduit à y. Les deux directions OX' et OY' font avec OY les angles

$$-\frac{\pi}{2} + \alpha \text{ et } \alpha,$$

ce qui donne pour la projection du second chemin

$$x' \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + y' \cos\alpha,$$

ou

$$x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

et l'on a l'équation

$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

On obtient ainsi les formules

$$(3) \quad \begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \end{cases}$$

qui servent à passer des anciennes coordonnées aux nouvelles.

51—Occupons-nous maintenant de la question générale. Soient OX et OY deux axes quelconques faisant entre eux un

angle θ, OX′ et OY′ deux nouveaux axes dont on définit la direction par les angles α et β qu'ils font avec OX (fig. 29); on convient de regarder les angles α et β comme positifs, s'ils sont comptés en tournant de OX vers OY, et comme négatifs en sens contraire. Par un point M quelconque du plan menons les droites MP et MP′ respectivement parallèles aux axes OY et OY′. Pour avoir x, nous projetterons les deux chemins OPM, OP′M sur une direction OH perpendiculaire à OY, et obtenue en tournant d'un angle droit de OY vers OX; la direction OX faisant avec OH l'angle $\frac{\pi}{2}-\theta$, et la direction OY étant perpendiculaire à OH, la projection du premier chemin se réduit à $x \sin\theta$. La direction OX′ fait avec OH un angle égal à l'angle HOX, augmenté de l'angle XOX′, ce qui fait $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\alpha$; de même, la direction OY′ fait avec OH un angle égal à $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\beta$; on a donc pour la projection du second chemin

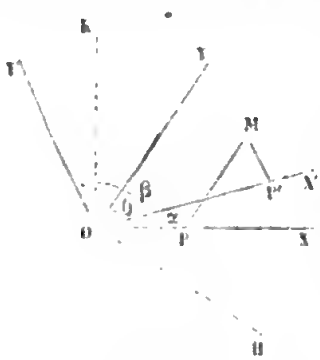


Fig. 29.

$$x' \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\alpha\right)+y' \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\beta\right),$$

ou

$$x' \sin(\theta-\alpha)+y' \sin(\theta-\beta),$$

ce qui donne l'équation

$$x \sin\theta = x' \sin(\theta-a)+y' \sin(\theta-\beta).$$

Pour avoir y, projetons les deux chemins OPM, OP′M sur une direction OK perpendiculaire à OX, et obtenue en tournant d'un angle droit de OX vers OY. La direction OX étant perpendiculaire à OK et la direction OY faisant avec cette droite l'angle $-\frac{\pi}{2}+\theta$, la projection du premier chemin se réduit à $y \sin\theta$. Les angles que les directions OX′ et OY′ font avec OK

sont égaux aux angles qu'elles font avec OX, diminués de $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne $-\frac{\pi}{2}+\alpha$, et $-\frac{\pi}{2}+\beta$; la projection du second chemin est donc

$$x' \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+y'\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\beta\right),$$

ou

$$x' \sin\alpha+y' \sin\beta,$$

et l'on a l'équation

$$y \sin\theta = x' \sin\alpha + y' \sin\beta.$$

On obtient ainsi les deux formules

$$(4)\quad \begin{cases} x=\dfrac{x' \sin(\theta-\alpha)+y' \sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}, \\ y=\dfrac{x' \sin\alpha+y' \sin\beta}{\sin\theta}, \end{cases}$$

pour la transformation des coordonnées obliques en d'autres coordonnées obliques.

On en déduit facilement des formules servant à revenir des nouveaux axes aux anciens. L'angle des nouveaux axes est $\beta-\alpha$; les axes OX et OY font avec OX' les angles $-\alpha$ et $\theta-\alpha$; il suffit donc, dans les formules précédentes, de remplacer θ par $\beta-\alpha$, α par $-\alpha$, β par $\theta-\alpha$, ce qui donne

$$(5)\quad \begin{cases} x'=\dfrac{x \sin\beta+y \sin(\beta-\theta)}{\sin(\beta-\alpha)}, \\ y'=\dfrac{-x \sin\alpha+y \sin(\theta-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}. \end{cases}$$

52—On déduit de ces formules générales quelques formules particulières qu'il est bon de connaître.

1° *Cas où les axes primitifs sont rectangulaires.* Dans ce cas on a $\theta=\frac{\pi}{2}$, et les formules (4) se réduisent à

$$(6)\quad \begin{cases} x=x' \cos\alpha+y' \cos\beta, \\ y=x' \sin\alpha+y' \sin\beta. \end{cases}$$

2° *Cas où les nouveaux axes sont rectangulaires.* Supposons $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$, les formules (4) deviennent

$$(7)\quad \begin{cases} x = \dfrac{x' \sin(\theta - \alpha) - y' \cos(\theta - \alpha)}{\sin\theta}, \\ y = \dfrac{x' \sin\alpha + y' \cos\alpha}{\sin\theta}. \end{cases}$$

On pourrait supposer aussi $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$, ce qui revient à changer le sens de l'axe OY', et par conséquent le signe de y' dans les formules (7).

3° *Cas où les deux systèmes d'axes sont rectangulaires.* Si dans les formules (6) on suppose $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, on obtient les formules (3) déjà trouvées,

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{cases}$$

On les obtiendrait aussi en supposant dans les formules (7) $\theta = \frac{\pi}{2}$.

TRANSFORMATION GÉNÉRALE.

53.—Supposons que l'on change à la fois l'origine et la direction des axes. On déterminera le nouveau système par les coordonnées a et b de la nouvelle origine relativement aux anciens axes, et par les angles α et β que font les nouveaux axes O'X' et O'Y' avec l'axe OX (fig. 30). Par le point O' menons deux axes $O'X_1$ et $O'Y_1$ respectivement parallèles à OX et OY. On a,

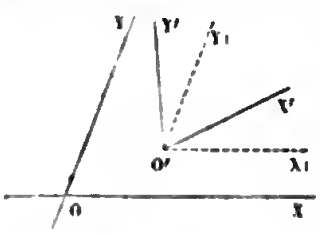


Fig. 30.

d'une part,

$$x = a + x_1,$$
$$y = b + y_1;$$

d'autre part, en vertu des formules (4),

$$x_1 = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta)}{\sin\theta},$$

$$y_1 = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta};$$

on en déduit les formules générales de transformation

$$(8)\quad \begin{cases} x = a + \dfrac{x' \sin(\theta-\alpha) + y' \sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}, \\ y = b + \dfrac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta}. \end{cases}$$

Nous remarquerons que ces formules de transformation sont homogènes et du premier degré, par rapport aux coordonnées qu'elles renferment.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES RECTILIGNES EN COORDONNÉES POLAIRES.

54—Soient OX et OY deux axes rectangulaires; prenons l'origine pour pôle, et l'axe des x pour axe polaire (fig. 31) ; en projetant la droite OM sur l'axe OX et sur l'axe OY, on obtient les relations

Fig. 31.

$$(9)\quad \begin{cases} x = \rho \cos\omega, \\ y = \rho \sin\omega. \end{cases}$$

On passera réciproquement des coordonnées polaires aux coordonnées rectilignes par les formules

$$(9)\quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tang\theta = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Nous avons fait plusieurs transformations de cette sorte, quand nous avons cherché les équations en coordonnées rectilignes de la cissoïde, du limaçon de Pascal et de la rosace (nos 29, 35, 39).

DISTANCE DE DEUX POINTS.

55—Supposons d'abord les axes rectangulaires et cherchons la distance de l'origine à un point M dont nous appelons x et y les coordonnées; dans le triangle rectangle OPM (fig. 32) on a

Fig. 32.

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = x^2 + y^2,$$

quelle que soit la position du point M dans le plan; d'où l'on déduit, en désignant par l la distance OM,

$$(10)\quad l=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Cherchons maintenant la distance des deux points M et M', situés d'une manière quelconque dans le plan; nous appelons x et y les coordonnées du point M, x' et y' celles du point M' par rapport aux axes rectangulaires OX, OY. Par le point M (fig. 33) menons des axes MX', MY', parallèles aux axes proposés; les coordonnées du point M', relativement à ces nouveaux axes sont égales à $x'-x$, $y'-y$, en vertu des formules (2) du n° 49. La distance l de la nouvelle origine M au point M', d'après la formule (10), sera donc

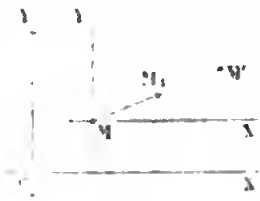


Fig. 33.

$$(11)\quad l=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}.$$

56—Nous avons supposé jusqu'à présent les axes rectangulaires. Quand les axes sont obliques et font entre eux l'angle θ, l'expression de la distance est un peu plus compliquée. Cherchons d'abord la distance de l'origine O à un point quelconque M du plan. Dans le triangle OPM (fig. 34), quelle que soit la position du point M, on a

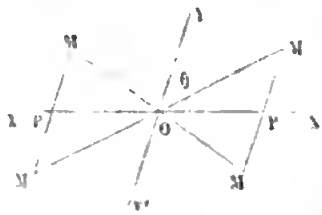


Fig. 34.

$$\overline{OM}^2=\overline{OP}^2+\overline{PM}^2-2.OP.PM.\cos OPM.$$

Quand le point M est situé dans l'angle YOX, les coordonnées x et y de ce point sont égales à $+$ OP et à $+$ PM, et l'angle OPM est le supplément de l'angle θ; on a donc

$$(12)\quad l=\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\theta}.$$

Si le point M est situé dans l'angle Y'OX', les coordonnées x et y étant égales à $-$ OP et à $-$ PM, et l'angle OPM le supplément de θ, on obtient la même formule (12). Quand le point M est situé dans l'un des angles YOX', Y'OX, l'angle OPM est égal à θ, mais l'une des coordonnées est négative, ce qui reproduit encore la formule (12). Cette formule est donc générale.

Pour avoir la distance des deux points M et M', on imaginera

comme précédemment par le point M des axes parallèles aux premiers, et on obtiendra la formule

$$(13)\quad l = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\cos\theta}.$$

MILIEU D'UNE DROITE.

57—Appelons x et y les coordonnées du point M, x' et y' celles du point M', x_1 et y_1 celles du point M_1, milieu de la droite MM' (fig. 33). Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point M, les coordonnées nouvelles du point M' seront $x'-x$, $y'-y$; celles du point M_1 seront de même x_1-x, y_1-y; il est évident que celles-ci sont les moitiés des premières; on a donc

$$x_1 - x = \frac{x'-x}{2},$$

$$y_1 - y = \frac{y'-y}{2};$$

d'où l'on déduit

$$(14)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{x+x'}{2}, \\ y_1 = \dfrac{y+y'}{2}. \end{cases}$$

CLASSIFICATION DES LIGNES.

58—On a adopté pour la classification et l'étude des lignes en général les coordonnées rectilignes.

On a distingué d'abord les lignes en *algébriques* et *transcendantes*, suivant que les équations qui les représentent en coordonnées rectilignes sont algébriques ou transcendantes. Une équation est dite algébrique lorsque les coordonnées x et y n'y entrent qu'affectées de signes d'opérations algébriques. Mais, si l'une des coordonnées entre sous un signe transcendant, comme un sinus, un logarithme, etc., l'équation est dite transcendante. On peut toujours mettre les équations algébriques sous forme entière, en faisant disparaître les radicaux et les dénominateurs.

Les lignes algébriques ont été classées d'après le degré de leurs équations. Les lignes du premier degré sont celles qui sont représentées par des équations du premier degré en x et y, l'équation du second degré donne les lignes du second degré, etc.

Il est aisé de voir que le degré d'une ligne reste le même, quelle que soit la position des axes des coordonnées rectilignes. En effet, soit $f(x, y)=0$ l'équation d'une ligne rapportée à de certains axes OX et OY, m le degré de cette équation supposée entière (dans l'évaluation du degré on ne tient compte que des coordonnées x et y). Pour rapporter cette ligne à d'autres axes O'X' et O'Y', on substituera à la place de x et y dans l'équation les valeurs données par les formules de transformation (8); ces formules étant du premier degré par rapport aux coordonnées, il est impossible que l'équation en x' et y' soit d'un degré plus élevé que m. Elle ne sera pas non plus d'un degré moindre; car alors la transformation inverse élèverait le degré, ce qui est impossible. Ainsi la nouvelle équation est de même degré que l'équation primitive.

Le degré d'une ligne indique en combien de points au plus elle peut être coupée par une droite. En effet, soit m le degré de la ligne, $f(x, y)=0$ l'équation qui la représente lorsqu'on prend la droite sécante pour axe des x; si dans cette équation on fait $y=0$, l'équation en x ainsi obtenue donnera les abscisses des points du lieu qui ont une ordonnée nulle, c'est-à-dire les points communs à ce lieu et à l'axe des x. Quand le premier membre de l'équation n'est pas identiquement nul, comme il est au plus du degré m, l'équation n'a pas plus de m racines et par conséquent la droite a au plus m points communs avec le lieu. Si l'on savait que l'équation fut vérifiée par plus de m valeurs de x, le premier membre serait identiquement nul, et par conséquent la droite entière ferait partie du lieu; dans ce cas, le polynôme $f(x, y)$ devenant identiquement nul, quand on y fait $y=0$, contiendrait y en facteur et l'équation $f(x, y)=0$ se décomposerait en deux, l'une $y=0$ du premier degré, l'autre du degré $m-1$.

D'après cela, les lignes du premier degré, ne pouvant être coupées par une droite en plus d'un point, sont des lignes droites. Les lignes du second degré ne peuvent être coupées par une droite en plus de deux points; celles du troisième degré en plus de trois points. Le cercle, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole sont des courbes du second degré (nos 11, 19, 23, 26); ces courbes peuvent être coupées en deux points par des droites. La cissoïde et la strophoïde (nos 29 et 32) sont du troisième degré; ces courbes peuvent être coupées en trois points par des droites. Le limaçon de Pascal (no 35) est du quatrième degré, la rosace à quatre branches (no 39) du sixième degré.

Nous étudierons d'abord les lignes du premier degré, puis celles du second degré, et ensuite les lignes d'un degré quelconque.

Quand on dit qu'une équation algébrique entière du degré m représente une ligne du degré m, on suppose que le premier membre n'est pas décomposable en un produit de facteurs entiers; autrement l'équation représenterait deux ou un plus grand nombre de lignes d'ordre inférieur. Ainsi, par exemple, une équation du second degré, dont le premier membre est le produit de deux facteurs entiers du premier degré, représente deux lignes du premier degré, c'est-à-dire deux droites. De même, une équation du troisième degré peut représenter trois droites, ou une ligne du second degré avec une ligne droite. C'est pourquoi certaines propriétés des lignes de l'ordre m s'appliquent au système de m droites, c'est-à-dire au polygone de m côtés.

Digitized by Google

LIVRE II

LIGNE DROITE ET CERCLE.

CHAPITRE I

Ligne droite.

CONSTRUCTION DE L'ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ.

39—L'équation générale du premier degré entre les deux variables x et y est de la forme

$$(1)\quad Ax+By+C=0.$$

Nous avons déjà fait remarquer que la ligne représentée par cette équation, ne pouvant être coupée par une droite en plus d'un point, est nécessairement droite. Nous allons démontrer directement que cette équation représente une ligne droite.

Il est impossible que les deux coefficients A et B des variables soient nuls à la fois; car alors il faudrait que l'on eût $C=0$, et l'équation se réduirait à une identité. Mais il peut arriver que l'un des coefficients soit nul; si, par exemple, le coefficient A est nul, l'équation se réduit à la forme $By+C=0$ ou $y=b$. Cette équation représente le lieu d'un point M dont l'ordonnée MP est constante et égale à b, quelle que soit l'abscisse OP; c'est une droite G'G parallèle à l'axe OX (fig. 35); on l'obtient en portant sur l'axe OY, à partir de l'origine, une longueur OB égale à la valeur absolue de b, dans un sens ou dans l'autre, suivant le signe de b, et menant par le point B une parallèle G'G à l'axe OX. En particulier l'équation $y=0$ représente l'axe OX lui-même.

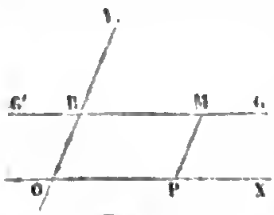


Fig 35.

Lorsque le coefficient B est nul, l'équation se réduit à

$Ax+C=0$, ou $x=a$. Cette équation représente le lieu du point M dont l'abscisse MQ est constante et égale à a, quelle que soit l'ordonnée OQ; c'est une droite H'H parallèle à l'axe OY; on l'obtient en portant sur l'axe OX, à partir de l'origine, une longueur OA égale à la valeur absolue de a, dans un sens ou dans l'autre, suivant le signe de a, et menant par le point A une parallèle H'H à l'axe OY. En particulier, l'équation $x=0$ représente l'axe OY.

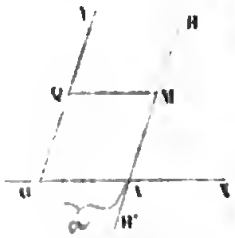


Fig. 36.

Lorsque le coefficient B n'est pas nul, on peut diviser par B et mettre l'équation sous la forme

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

ou

$$(2)\quad y=ax+b,$$

en posant, pour abréger, $a=-\frac{A}{B}$; $b=-\frac{C}{A}$.

Considérons d'abord le cas particulier où $b=0$, ce qui réduit l'équation à la forme

$$y=ax,\ \text{ou}\ \frac{y}{x}=a.$$

Si a est un nombre positif, tous les points du lieu, ayant leurs coordonnées de même signe, se trouvent dans l'angle YOX, ou dans son opposé par le sommet Y'OX' (fig. 37). Prenons une abscisse quelconque OP, et par le point P menons une parallèle à l'axe des y; on pourra, sur cette parallèle, trouver un point M tel que $\frac{MP}{OP}=a$, le point M sera un point du lieu. Soient M, M', M''... divers points du lieu construits de cette façon; des rapports égaux

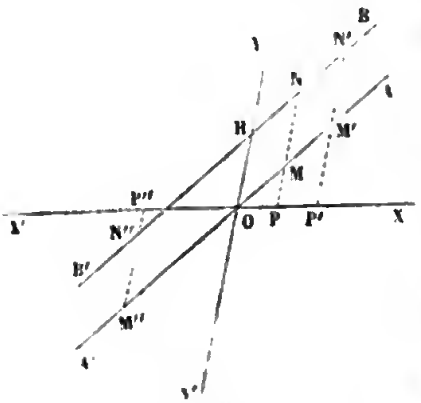


Fig. 37.

$$\frac{MP}{OP}=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{-M''P''}{-OP''}=\ldots\ldots$$

il résulte que les triangles OPM, OP'M', OP''M''... sont semblables, et que par suite les angles MOP, M'OP', M''OP''... sont égaux; donc les points M, M', M''... sont tous placés sur une même droite A'A, passant par l'origine. D'ailleurs, l'équation est vérifiée par les coordonnées de chacun des points de cette droite; donc l'équation $y=ax$ représente *la droite* indéfinie A'A.

Lorsque a est négatif, tous les points du lieu ayant leurs coordonnées de signes contraires sont situés dans les angles Y'OX, et YOX' (fig. 38). Soient M, M', M''.... différents points du lieu; des relations

$$\frac{MP}{-OP}=\frac{M'P'}{-OP'}=\frac{-M''P''}{OP''}=\ldots\ldots=a,$$

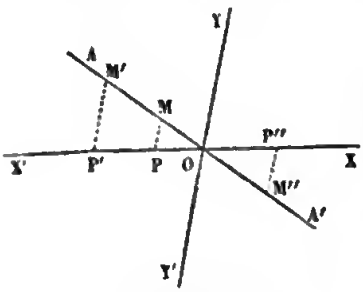


Fig. 38.

on déduit, comme précédemment, que tous ces points sont sur une même droite A'A passant par l'origine. Ainsi, dans tous les cas, l'équation $y=ax$ représente une ligne droite passant par l'origine.

Revenons maintenant à l'équation $y=ax+b$. Si l'on compare les deux équations $y=ax+b$ et $y=ax$, on voit que les ordonnées correspondantes à une même abscisse diffèrent d'une quantité constante b; on augmentera donc ou l'on diminuera, suivant le signe de b, les ordonnées de tous les points de la droite A'A de longueurs MN, M'N', M''N''.... égales à la valeur absolue de b (*fig.* 37); les points N, N', N''... ainsi obtenus forment évidemment une droite B'B parallèle à A'A.

Il résulte de ce qui précède que *toute équation du premier degré entre les deux variables* x *et* y *représente une ligne droite.*

60—Nous allons faire voir que, réciproquement, toute ligne droite est représentée par une équation du premier degré. Si la droite est parallèle à l'axe OX, comme tous ses

points ont même ordonnée, son équation est de la forme $y=b$ (fig. 35). Si elle est parallèle à l'axe OY, tous ses points ayant même abscisse, son équation est de la forme $x=a$ (fig. 36). Si la droite passe par l'origine, elle occupe l'une des deux positions indiquées dans les figures 37 et 38, et les triangles semblables donnent

$$\frac{MP}{OP}=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{-M''P''}{-OP''}=\ldots\ldots$$

ou

$$\frac{MP}{-OP}=\frac{MP'}{-OP'}=\frac{-M''P''}{OP''}=\ldots\ldots$$

Si l'on appelle a ce rapport constant, l'équation de la droite est $\frac{y}{x}=a$ ou $y=ax$. Supposons enfin que la droite, sans être parallèle à l'un des axes, ne passe pas par l'origine (fig. 37); une parallèle à cette droite menée par l'origine aura pour équation, d'après ce qui précède, $y=ax$; or, l'excès de l'ordonnée de la droite proposée sur l'ordonnée correspondante de la parallèle est une quantité constante b: donc la droite proposée a pour équation $y=ax+b$.

SIGNIFICATION DES COEFFICIENTS.

61—L'équation de toute droite non parallèle à l'axe des y peut être mise sous la forme

$$y=ax+b.$$

La constante b est l'ordonnée du point H où la droite coupe l'axe des y; on l'appelle *ordonnée à l'origine.*

La constante a ne dépend que de la direction de la droite, elle est la même pour toutes les droites parallèles, on l'appelle *coefficient angulaire* ou *de direction.* Menons par l'origine, et au-dessus de l'axe X'X, une parallèle OA à la droite proposée; appelons θ l'angle des axes, α l'angle de OA avec OX, angle qui peut varier de 0 à π; on a, dans la disposition de la première figure,

$$a=\frac{y}{x}=\frac{MP}{OP}=\frac{\sin MOP}{\sin OMP}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},$$

et, dans celle de la seconde,

$$a=\frac{y}{x}=\frac{\mathrm{MP}}{-\mathrm{OP}}=\frac{\sin \mathrm{MOP}}{-\sin \mathrm{OMP}}=\frac{\sin \alpha}{-\sin(\alpha-\theta)}=\frac{\sin \alpha}{\sin(\theta-\alpha)};$$

on a donc, dans tous les cas,

$$(3)\quad \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta-\alpha)}=a.$$

Quand les axes sont rectangulaires, cette formule devient

$$(4)\quad \tang \alpha=a.$$

La formule (4) détermine l'angle α, que fait avec l'axe OX la droite proposée, quand les axes sont rectangulaires.

Quand les axes sont obliques, on déduit de la formule (3)

$$(5)\quad \tang \alpha=\frac{a \sin \theta}{1+a \cos \theta}.$$

Mais cette formule n'est pas calculable par logarithmes; quand on veut obtenir l'angle α au moyen des tables, on a recours à une autre formule. L'équation (3) donne

$$\frac{\sin \alpha}{a}=\frac{\sin(\theta-\alpha)}{1}=\frac{\sin \alpha+\sin(\theta-\alpha)}{a+1}=\frac{\sin \alpha-\sin(\theta-\alpha)}{a-1};$$

si l'on transforme en produits la somme et la différence des sinus, il vient

$$\frac{2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)}{a+1}=\frac{2 \cos\frac{\theta}{2} \sin\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)}{a-1},$$

d'où

$$(6)\quad \tang\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{a-1}{a+1} \tang\frac{\theta}{2}.$$

62—Lorsqu'on veut construire la droite représentée par une équation du premier degré à coefficients numériques, on cherche ordinairement les points A et B où elle coupe les axes, et on fait passer une droite par ces deux points.

Soit, par exemple, l'équation $2x-3y=5$; pour $y=0$, on a $x=\frac{5}{2}$; pour $x=0$, $y=-\frac{5}{3}$; on portera, à partir de l'origine, sur l'axe des x, la longueur $\frac{5}{2}$ dans le sens positif, sur l'axe des y la longueur $\frac{5}{3}$ dans le sens négatif.

Quand l'équation ne renferme pas de terme constant, la

droite passe par l'origine. On en détermine un second point, en donnant à x une valeur particulière; soit, par exemple, l'équation $2y+3x=0$; l'équation étant vérifiée pour $x=0$, $y=0$, la droite passe par l'origine; si l'on fait $x=2$, on a $y=-3$; construisant le point qui a pour coordonnées $x=2$, $y=-3$, on obtiendra un second point que l'on joindra à l'origine.

63—L'équation générale de la ligne droite

$$Ax+By+C=0$$

renferme deux coefficients ou *paramètres* arbitraires; car on peut diviser l'équation par l'un des coefficients, et il restera les rapports des deux autres coefficients à celui par lequel on a divisé. Quand on met l'équation sous la forme $y=ax+b$, ces deux paramètres sont a et b. Pour fixer la position de la ligne droite dans le plan, il faudra donner les valeurs des deux paramètres, ou deux équations entre ces deux paramètres servant à déterminer leurs valeurs. Il faut donc deux conditions géométriques pour déterminer une ligne droite, en supposant que chaque condition s'exprime par une équation.

PROBLÈME I.

64 — *Trouver l'équation générale des droites qui passent par un point donné.*

Appelons x' et y' les coordonnées du point donné M. Une droite quelconque a pour équation

$$y=ax+b.$$

Pour que cette droite passe par le point M, il faut que les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la droite; si donc on remplace les coordonnées variables x et y par les coordonnées x' et y' du point M, on aura l'équation de condition

$$y'=ax'+b.$$

Cette relation entre les deux paramètres a et b détermine l'un des paramètres en fonction de l'autre, par exemple le paramètre b en fonction de a; en remplaçant, dans l'équation de la droite, b par sa valeur $y'-ax'$ tirée de l'équation de condi-

tion, ce qui se fait en retranchant les deux équations l'une de l'autre membre à membre, on obtient l'équation

$$(7)\quad y-y'=a(x-x').$$

L'équation (7), dans laquelle le coefficient angulaire a est arbitraire, représente toutes les droites qui passent par le point M. Quand on fait varier le paramètre a, la droite tourne autour du point M.

Nous avons supposé que toute droite est représentée par une équation de la forme $y=ax+b$, quelle que soit sa position dans le plan. Cependant il y a une exception, c'est lorsque la droite est parallèle à l'axe des y; car, dans ce cas, le coefficient angulaire a est infini, ainsi que l'ordonnée à l'origine b. Cependant, si dans l'équation (7) on remplace a par le rapport $\frac{m}{n}$, et qu'on mette ensuite cette équation sous la forme

$$n(y-y')=m(x-x'),$$

en faisant $n=0$, on obtient l'équation $x=x'$, qui représente la parallèle à l'axe des y, menée par le point M.

PROBLÈME II.

65—*Par un point donné mener une droite parallèle à une droite donnée.*

Soit

$$y=ax+b$$

l'équation de de la droite donnée AB, x' et y' les coordonnées du point donné M (fig. 39). La droite demandée devant passer par le point donné, son équation, comme nous l'avons dit, sera de la forme

$$y-y'=a'(x-x').$$

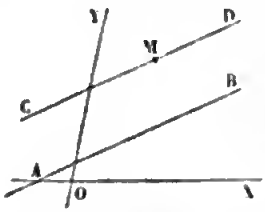


Fig. 39.

Cette droite devant être parallèle à la droite AB, son coefficient angulaire a' sera égal au coefficient angulaire a de la droite AB; on aura donc $a'=a$, et la parallèle demandée CD sera représentée par l'équation

$$y-y'=a(x-x').$$

PROBLÈME III.

66—*Mener une droite par deux points donnés.*

Soient M et M′ (fig. 40) les deux points donnés, x' et y' les coordonnées du point M, x'' et y'' celles du point M′. La droite MM′, passant par le point M, est représentée par une équation de la forme

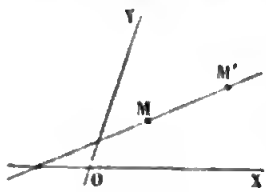


Fig. 40.

$$(7)\quad y-y'=a\,(x-x');$$

il s'agit de déterminer le coefficient a, de manière que cette droite passe aussi par le point M′. Il faut pour cela que les coordonnées du point M′ vérifient l'équation de la droite, ce qui donne la relation

$$y''-y'=a\,(x''-x'),$$

d'où l'on déduit

$$a=\frac{y''-y'}{x''-x'}.$$

Tel est le coefficient angulaire de la droite MM′; c'est le rapport de la différence des ordonnées à la différence des abscisses. Si, dans l'équation (7), on remplace a par sa valeur, on obtient l'équation de la droite MM′,

$$(8)\quad y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}\,(x-x'),$$

équation que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{x-x'}{x''-x'}=\frac{y-y'}{y''-y'}.$$

Lorsque le point M est à l'origine, on a $x'=0$, $y'=0$, et l'équation (7) se réduit à

$$y=\frac{y''}{x''}x.$$

67—Il arrive souvent que la droite est définie par les points

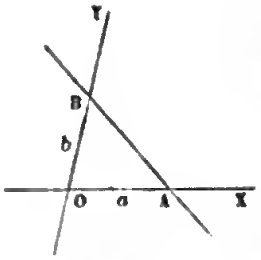


Fig. 41.

A et B où elle coupe les axes (fig. 41); appelons a et b les distances de l'origine à ces deux points. Si dans l'équation de la droite

$$Ax+By+C=0$$

on fait successivement $y=0$ et $x=0$, on obtient les points où elle coupe les axes; on a ainsi $a=-\frac{C}{A}$ et $b=-\frac{C}{B}$. En remplaçant A et B par leurs valeurs déduites de ces relations, on met l'équation sous la forme simple

$$(9)\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

PROBLÈME IV.

68—*Trouver le point d'intersection de deux droites données.*

Soient

$$Ax+By+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0,$$

les équations des deux droites données AB et CD (fig. 42), M le point d'intersection de ces deux droites.

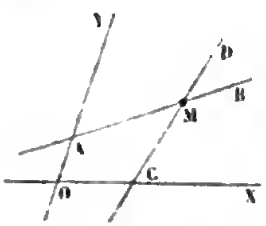


Fig. 42.

Le point M appartenant à chacune des droites, ses coordonnées vérifient à la fois les deux équations; si donc on regarde ces deux équations comme simultanées, x et y désigneront les coordonnées du point commun M; en résolvant ces deux équations à deux inconnues, on obtient les coordonnées de ce point

$$x=\frac{BC'-CB'}{AB'-BA'},$$

$$y=\frac{CA'-AC'}{AB'-BA'}.$$

Quand le dénominateur $AB'-BA'$ est différent de zéro, les formules donnent pour x et y des valeurs finies et déterminées et les deux droites se coupent effectivement en un point M.

Mais quand le dénominateur $AB' - BA'$ est nul sans que les numérateurs le soient, on obtient pour x et y des valeurs infinies; ceci indique que les deux droites proposées sont parallèles; et, en effet, dans ce cas elles ont leurs coefficients angulaires égaux $-\frac{B}{A} = -\frac{B'}{A'}$. Si l'on a à la fois $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$, les deux numérateurs sont nuls en même temps que les dénominateurs et les valeurs de x et de y se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$; il y a indétermination, et, en effet, les deux droites proposées coïncident; car, si l'on pose $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = k$, d'où $A' = Ak$, $B' = Bk$, $C' = Ck$, que l'on remplace dans la seconde équation, et que l'on divise par k, cette équation devient identique à la première.

PROBLÈME V.

69 — *Trouver l'équation générale des droites qui passent par le point d'intersection de deux droites données.*

Soient

$$(10)\quad Ax + By + C = 0,$$
$$(11)\quad A'x + B'y + C' = 0,$$

les équations des deux droites données. On pourrait traiter la question en cherchant les coordonnées du point d'intersection des deux droites par la résolution des équations (10) et (11), et faisant passer une droite quelconque par ce point (n° 64). Mais on arrive au même résultat par une marche beaucoup plus rapide.

Si l'on ajoute les deux équations (10) et (11), après avoir multiplié l'une d'elles par une quantité arbitraire λ, on obtient une équation du premier degré

$$(12)\quad (Ax + By + C) + \lambda(A'x + B'y + C') = 0,$$

qui représente une troisième droite passant par le point d'intersection des deux premières, et, en effet, les coordonnées de ce point, vérifiant à la fois les deux équations (10) et (11), an-

nulent les deux parenthèses et, par conséquent, satisfont à l'équation (12). Cette équation (12), dans laquelle le coefficient λ est arbitraire, représente toutes les droites qui passent par le point d'intersection des deux droites données; car on peut déterminer ce coefficient de manière que la droite passe par un point quelconque M du plan, ayant pour coordonnées x' et y' ; il suffit pour cela que l'équation de condition

$$(Ax'+By'+C)+\lambda(A'x'+B'y'+C')=0$$

soit vérifiée, ce qui donne

$$(13)\ \lambda=-\frac{Ax'+By'+C}{A'x'+B'y'+C'}.$$

Quand on fait $\lambda=0$, l'équation (12) devient $Ax+By+C=0$; c'est la première droite. Si l'on remplace λ par $\frac{m}{n}$, et qu'après avoir multiplié par n, on fasse $n=0$, on a la seconde droite $A'x+B'y+C'=0$.

70—Si, dans l'équation (12), on remplace λ par sa valeur (13), on obtient l'équation

$$(14)\ \frac{Ax+By+C}{Ax'+By'+C'}=\frac{A'x+B'y+C'}{A'x'+B'y'+C'},$$

qui représente la droite passant par le point M et le point d'intersection des deux droites données.

Les numérateurs sont les premiers membres des équations de deux droites données, les dénominateurs les valeurs de ces polynômes, quand on remplace x et y par les coordonnées du point donné. On reconnaît immédiatement, à l'inspection de cette équation, que la droite qu'elle représente passe par le point donné et par le point d'intersection des deux droites données.

PROBLÈME VI.

71—*Reconnaître si trois points sont en ligne droite.*

Soient M, M', M'' les trois points donnés, x', y' les coordonnées du premier point, x'', y'' celles du second, x''' et y''',

Digitized by Google

celles du troisième (fig. 43). La droite MM′ a pour coefficient angulaire $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ (n° 66); de même la droite MM″ a pour coefficient angulaire $\frac{y'''-y'}{x'''-x'}$; quand les trois points M, M′, M″ sont en ligne droite, les deux droites MM′, MM″ coïncident et ont même coefficient angulaire; les coordonnées des trois points doivent donc vérifier la condition

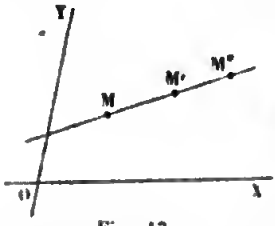


Fig. 43.

$$(15)\quad \frac{y''-y'}{x''-x'}=\frac{y'''-y'}{x'''-x'},$$

PROBLÈME VII.

72—*Reconnaître si trois droites passent par un même point.*

Soient

$$Ax+By+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0,$$
$$A''x+B''y+C''=0,$$

les équations de trois droites données. Pour voir si ces trois droites passent par un même point, on cherchera le point d'intersection des deux premières droites, et on substituera les coordonnées de ce point dans la troisième équation.

Mais d'ordinaire, quand trois droites passent par un même point, on le reconnaît immédiatement à l'inspection de leurs équations, l'une d'elles étant la combinaison des deux autres. Pour en montrer un exemple, considérons les trois médianes d'un triangle OAB (fig. 44); prenons le sommet O pour origine, les deux côtés OA et OB pour axes des coordonnées, et désignons par a et b les deux longueurs OA et OB. La médiane AE, coupant les axes à des distances a et $\frac{b}{2}$ de l'origine, a pour équation

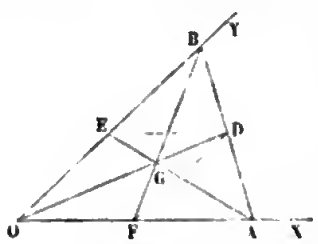


Fig. 44.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{\frac{b}{2}}=1;$$

de même, la médiane BF a pour équation

$$\frac{x}{\frac{a}{2}}+\frac{y}{b}=1.$$

Le point D, milieu de AB, a pour coordonnées $OF=\frac{a}{2}$, $OE=\frac{b}{2}$; la droite OD, qui va de l'origine à ce point, est représentée par l'équation

$$y=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}}x.$$

En résolvant les deux premières équations, on obtient les coordonnées $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{b}{3}$, du point d'intersection G des deux premières médianes AE et BF. Ces coordonnées vérifiant la troisième équation, on en déduit que la troisième médiane passe aussi par le point G.

On voit immédiatement que les trois médianes passent par un même point; car, si l'on retranche les deux premières équations membre à membre, on obtient la troisième.

73—Comme exemple de trois points en ligne droite, considérons un quadrilatère OACB (fig. 45); si l'on prolonge les quatre côtés indéfiniment, on forme ce qu'on appelle un quadrilatère complet; les côtés se coupent deux à deux en six points ou sommets; en joignant les sommets opposés, on obtient trois diagonales AB, A'B', OC; nous allons démontrer que les trois points D, E, F, qui divisent ces diagonales en deux parties égales, sont en ligne droite.

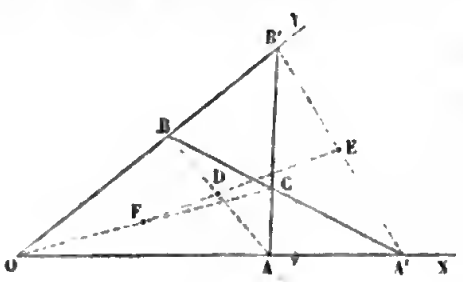


Fig. 45.

Prenons les côtés OA et OB pour axes des coordonnées; désignons par a et a' les deux longueurs OA et OA', par b et b' les deux longueurs OB et OB'. Le point D, milieu de AB, a pour coordonnées $x'=\frac{a}{2}$, $y'=\frac{b}{2}$. Le point E, milieu de A'B', a pour coordonnées $x''=\frac{a'}{2}$, $y''=\frac{b'}{2}$. Pour avoir les coordonnées du point F, milieu de OC, cherchons celles du point C, intersection des deux droites AB', A'B, qui ont pour équations

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b'}=1,$$

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b}=1.$$

En résolvant ces deux équations simultanées, on obtient les coordonnées du point C,

$$x=\frac{aa'(b-b')}{ab-a'b'},\quad y=\frac{bb'(a-a')}{ab-a'b'}.$$

Le point F étant le milieu de la droite OC, ses coordonnées x''', y''' sont la moitié de celles du point C; on a donc

$$x'''=\frac{aa'(b-b')}{2(ab-a'b')},\quad y'''=\frac{bb'(a-a')}{2(ab-a'b')}.$$

Ayant les coordonnées des points D, E, F, on reconnaît aisément que les trois points sont en ligne droite. Les droites DE et DF ont pour coefficients angulaires

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=\frac{b'-b}{a'-a},$$

$$\frac{y'''-y'}{x'''-x'}=\frac{\dfrac{bb'(a-a')}{ab-a'b'}-b}{\dfrac{aa'(b-b')}{ab-a'b'}-a}=\frac{b'-b}{a'-a};$$

ces deux coefficients angulaires étant égaux entre eux, on en conclut que les trois points D, E, F sont en ligne droite.

PROBLÈME VIII.

74—*Trouver l'angle de deux droites.*

Soient

$$y = ax + b,$$
$$y = a'x + b',$$

les équations des deux droites données. Par l'origine et au-dessus de l'axe X'X, menons des parallèles OA et OA' aux droites données (fig. 46), et appelons α et α' les angles que font ces droites avec OX, V l'angle de ces deux droites, et pour préciser, supposons $\alpha' > \alpha$. On a évidemment

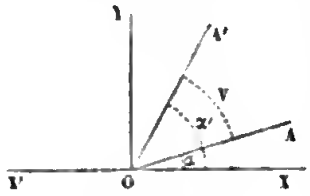


Fig. 46.

$$V = \alpha' - \alpha,$$

d'où

$$tang\, V = \frac{tang\, \alpha' - tang\, \alpha}{1 + tang\, \alpha\, tang\, \alpha'}.$$

Quand les axes sont rectangulaires, on a

$$tang\, \alpha = a\,,\ tang\, \alpha' = a';$$

si l'on substitue dans la formule précédente, il vient

$$(16)\quad tang\, V = \frac{a' - a}{1 + a a'}.$$

Quand les axes sont obliques, on a (n° 61) :

$$tang\, \alpha = \frac{a \sin \theta}{1 + a \cos \theta},\ tang\, \alpha' = \frac{a' \sin \theta}{1 + a' \cos \theta},$$

et, par suite,

$$(17)\quad tang\, V = \frac{(a' - a) \sin \theta}{1 + aa' + (a + a') \cos \theta}.$$

75—On déduit facilement de là la condition pour que deux droites soient perpendiculaires entre elles. Quand l'angle V est droit, sa tangente devient infinie et l'on a la condition

$$(18)\quad 1 + aa' = 0,$$

si les axes sont rectangulaires, et la condition

$$(19)\quad 1 + aa' + (a + a') \cos \theta = 0,$$

si les axes sont obliques.

PROBLÈME IX.

76—*D'un point donné abaisser une perpendiculaire sur une droite donnée, et trouver la longueur de cette perpendiculaire.*

Soit

$$(2)\quad y = ax + b$$

l'équation de la droite donnée AB, x' et y' les coordonnées du point donné M (fig. 47). Supposons d'abord les axes rectangulaires. Une droite quelconque passant par le point M a son équation de la forme (n° 64)

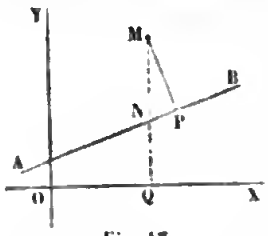


Fig. 47.

$$y - y' = a(x - x').$$

Pour que cette droite soit perpendiculaire à la droite AB, il faut que la relation (n° 75)

$$1 + aa' = 0$$

soit vérifiée; d'où l'on déduit

$$a' = -\frac{1}{a}.$$

En remplaçant a' par sa valeur, on obtient l'équation de la perpendiculaire MP

$$(20)\quad y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

On trouvera les coordonnées x et y du pied P de la perpendiculaire, ou le point d'intersection des deux droites AB et MP, en résolvant les deux équations simultanées (2) et (20); mais nous préférons chercher les différences $x - x'$ et $y - y'$; l'équation (2) peut être mise sous la forme

$$y - y' = a(x - x') - (y' - ax' - b);$$

si dans cette équation on remplace $y - y'$ par sa valeur donnée par l'équation (20), on trouve

$$x - x' = \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2},$$

et, par suite, en vertu de l'équation (20),

$$y - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2}.$$

En appliquant la formule de la distance de deux points (n° 55), on obtiendra la longueur l de la perpendiculaire MP,

$$l=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}=\sqrt{\frac{(y'-ax'-b)^2(1+a^2)}{(1+a^2)^2}};$$

d'où

$$(21)\quad l=\frac{y'-ax'-b}{\pm\sqrt{1+a^2}}.$$

On mettra devant le radical le signe du numérateur, afin d'avoir pour l une longueur positive. Il est aisé de voir que ce numérateur est positif ou négatif, suivant que le point M est situé au-dessus ou au-dessous de la droite AB. En effet, soit N le point où la droite AB est rencontrée par la parallèle à l'axe des y menée par le point M; le point N étant sur la droite AB, l'ordonnée y_1 de ce point est égale à $ax'+b$, de sorte que la formule (21) devient

$$l=\frac{y'-y_1}{\pm\sqrt{1+a^2}}.$$

La différence $y'-y_1$ est positive si le point M est au-dessus de N, négative s'il est au-dessous.

On aurait pu obtenir immédiatement la longueur de la perpendiculaire sous cette dernière forme, en remarquant que le triangle rectangle MNP donne

$$\mathrm{MP}=\mathrm{MN}\sin\mathrm{MNP}=\pm(y-y_1)\cos\alpha=\frac{y'-y_1}{\pm\sqrt{1+a^2}}.$$

77—Supposons maintenant les coordonnées obliques; les droites AB et MP seront perpendiculaires si leurs coefficients angulaires a et a' vérifient la relation

$$1+aa'+(a+a')\cos\theta=0,$$

d'où l'on déduit

$$a'=-\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta}.$$

La perpendiculaire MP a donc pour équation

$$(22)\quad y-y'=-\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta}(x-x').$$

En résolvant les deux équations simultanées (2) et (22), on obtiendra les coordonnées x et y du point P; si, comme précédemment, on cherche les différences $x-x'$, $y-y'$, on trouve

$$x-x'=\frac{(y'-ax'-b)\,(a+\cos\theta)}{1+a^2+2a\cos\theta};$$

$$y-y'=-\frac{(y'-ax'-b)\,(1+a\cos\theta)}{1+a^2+2a\cos\theta};$$

substituant ces différences dans la formule de la distance de deux points

$$l=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+2\,(x-x')\,(y-y')\cos\theta},$$

on a

$$l=\frac{\pm(y'-ax'-b)\sqrt{(a+\cos\theta)^2+(1+a\cos\theta)^2-2(a+\cos\theta)(1+a\cos\theta)\cos\theta}}{1+a^2+2a\cos\theta}.$$

En développant les calculs, on voit que la quantité placée sous le radical contient en facteur $1-\cos^2\theta$ ou $\sin^2\theta$, et s'écrit

$$(1+a^2+2a\cos\theta)\sin^2\theta;$$

il en résulte

$$(23)\quad l=\frac{(y'-ax'-b)\sin\theta}{\pm\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta}}.$$

Le numérateur est positif ou négatif suivant que le point M est situé au-dessus ou au-dessous de la droite donnée. On mettra devant le radical le signe du numérateur, afin d'avoir pour l une quantité positive.

78—Dans ce qui précède, nous avons supposé l'équation de la droite donnée mise sous la forme $y=ax+b$. Si cette équation avait la forme générale

$$(1)\quad Ax+By+C=0;$$

le coefficient angulaire a de la droite donnée étant égal à $-\frac{A}{B}$, on aurait dans le cas des coordonnées rectangulaires $a'=-\frac{1}{a}=\frac{B}{A}$, et la perpendiculaire abaissée du point M serait représentée par l'équation

$$y-y'=\frac{B}{A}(x-x'),$$

ou plus simplement

$$(24)\quad \frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}.$$

La formule (21), dans laquelle on remplace a et b par leurs valeurs $-\frac{A}{B}$, $-\frac{C}{B}$, devient

$$(25)\quad l=\frac{Ax'+By'+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Cette formule exprime la distance d'un point à une droite en coordonnées rectangulaires : le numérateur est le premier membre de l'équation de la droite, dans lequel on remplace x et y par les coordonnées du point; le dénominateur est la racine carrée de la somme des carrés des coefficients de x et de y.

Quand les axes sont obliques, on a

$$a'=\frac{B-A\cos\theta}{A-B\cos\theta};$$

la perpendiculaire a pour équation

$$(26)\quad \frac{x-x'}{A-B\cos\theta}=\frac{y-y'}{B-A\cos\theta},$$

et la formule (23) devient

$$(27)\quad l=\frac{(Ax'+By'+C)\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}.$$

Il est aisé de reconnaître le signe du numérateur, suivant la position du point M par rapport à la droite AB. Soit N le point où la parallèle NQ à l'axe des y rencontre la droite AB; pour le point N, l'expression $Ax+By+C$ est nulle; quand le coefficient B est positif, si l'on marche dans le sens des y positifs, le terme By augmente, et la fonction prend des valeurs positives de plus en plus grandes; si l'on marche dans le sens opposé, elle prend des valeurs négatives. C'est le contraire qui a lieu, lorsque B est négatif.

PROBLÈME X.

79—*Par le point d'intersection de deux droites données, mener une droite perpendiculaire à une droite donnée.*

Soient

$$Ax+By+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0,$$
$$A''x+B''y+C''=0,$$

les équations des trois droites données; toute droite passant par le point d'intersection des deux premières droites est représentée par une équation de la forme

$$(Ax+By+C)+\lambda(A'x+B'y+C')=0;$$

pour qu'elle soit perpendiculaire à la troisième droite, il faut que l'on ait, en supposant les axes rectangulaires,

$$1+\frac{A''(A+\lambda A')}{B''(B+\lambda B')}=0,$$

d'où l'on déduit la valeur de la constante λ,

$$\lambda=-\frac{AA''+BB''}{A'A''+B'B''};$$

en remplaçant λ par sa valeur, on obtient l'équation de la droite cherchée.

$$(28)\quad (A'A''+B'B'')(Ax+By+C)=(A''A+B''B)(A'x+B'y+C').$$

80—Les trois droites données forment un triangle dont les sommets sont les points d'intersection de ces droites deux à deux; l'équation (28) représente la perpendiculaire abaissée de l'un des sommets sur le côté opposé. En permutant les accents, on aura les équations des perpendiculaires abaissées de chacun des deux autres sommets sur le côté opposé :

$$(A''A+B''B)(A'x+B'y+C')=(AA'+BB')(A''x+B''y+C''),$$
$$(AA'+BB')(A''x+B''y+C'')=(A'A''+B'B'')(Ax+By+C).$$

En comparant ces trois équations, on voit qu'en ajoutant les deux premières membre à membre, on obtient la troisième. On en conclut que les trois hauteurs d'un triangle passent par un même point.

PROBLÈME XI.

81—*Trouver le lieu des points également distants de deux points donnés.*

Supposons les axes rectangulaires et soient x' et y', x'' et y'' les deux points donnés. Si nous désignons par x et y les coordonnées d'un point quelconque du lieu, ce lieu aura pour équation

$$(x-x')^2+(y-y')^2=(x-x'')^2+(y-y'')^2,$$

ou plus simplement

$$(29)\quad (x''-x')\left(x-\frac{x'+x''}{2}\right)+(y''-y')\left(y-\frac{y'+y''}{2}\right)=0.$$

C'est une droite perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les deux points donnés.

PROBLÈME XI.

82—*Trouver le lieu des points également distants de deux droites données.*

Nous supposons encore les axes rectangulaires ; soient

$$Ax+By+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0,$$

les équations des deux droites données. Si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point quelconque du lieu, ce lieu aura pour équation

$$(30)\quad \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{A'x+B'y+C'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2}}.$$

A cause du double signe, cette équation représente deux droites. Ce sont les bissectrices des angles formés par les deux droites données.

ÉQUATION DE LA LIGNE DROITE EN COORDONNÉES POLAIRES.

83—Soit O le pôle et OX l'axe polaire. On peut déterminer

la position d'une droite AB par la longueur a de la perpendiculaire OD abaissée de l'origine sur cette droite (fig. 48), et par l'angle α que fait cette perpendiculaire avec l'axe polaire. Si l'on appelle ρ et ω les coordonnées d'un point quelconque M de la droite, le triangle rectangle ODM donne

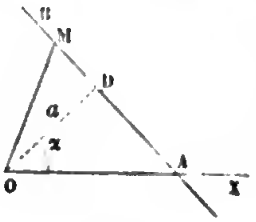


Fig. 48.

$$\rho = \frac{a}{\cos(\omega - \alpha)}.$$

Cette équation est de la forme

$$\rho = \frac{C}{A\cos\omega + B\sin\omega}.$$

Réciproquement toute équation de cette forme représente une droite; car si l'on revient aux coordonnées rectilignes, en prenant l'axe polaire pour axe des x, et une perpendiculaire menée par le pôle pour axe des y, cette équation prend la forme $Ax+By=C$.

CHAPITRE II.

Du Cercle.

84—Cherchons d'abord l'équation de la circonférence en coordonnées rectangulaires. Désignons par α et β les coordonnées du centre C (fig. 49) et par r le rayon; la circonférence, étant le lieu des points dont la distance au centre est égale au rayon, a pour équation

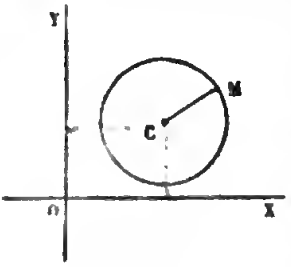


Fig. 49.

$$(1)\quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2;$$

cette équation développée se met sous la forme

$$(2)\quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Ainsi, *l'équation du cercle en coordonnées rectangulaires est une équation du second degré, qui ne renferme pas le rectangle*

xy *des variables, et dans laquelle les termes en* x^2 *et en* y^2 *ont même coefficient.*

85—Réciproquement, toute équation de cette forme en coordonnées rectangulaires représente une circonférence de cercle, quand elle représente un lieu. En effet, l'équation (2) peut s'écrire.

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}-c.$$

Marquons le point C, qui a pour coordonnées $-\frac{a}{2}$ et $-\frac{b}{2}$; supposons le second membre positif; le premier membre représentant le carré de la distance d'un point quelconque au point C, l'équation sera vérifiée par les coordonnées de tous les points du plan dont la distance au point C est constante et égale à $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}-c}$; elle représente donc une circonférence de cercle. Lorsque le second membre est nul, le premier membre, qui est la somme de deux carrés, ne pouvant s'annuler que si chacun des carrés est nul, ce qui exige que l'on ait $x=-\frac{a}{2}$, $y=-\frac{b}{2}$, l'équation ne sera vérifiée que par les coordonnées du point C; le lieu est un point. Enfin, lorsque le second membre est négatif, il est évident que l'équation ne représente aucun lieu; elle ne peut être vérifiée par aucun système de valeurs réelles de x et de y, c'est-à-dire par aucun point du plan; car la somme de deux carrés ne peut être égale à une quantité négative.

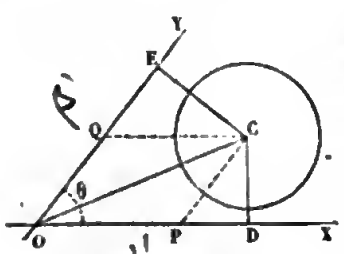


Fig. 50.

86—Supposons maintenant les axes des coordonnées obliques et faisant entre eux l'angle θ; en exprimant que la distance d'un point quelconque du lieu au centre est égale au rayon, on aura l'équation de la circonférence

$$(3)\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta=r^2.$$

Cette équation est de la forme

$$(4)\ x^2+y^2+2xy\cos\theta+ax+by+c=0.$$

Ainsi *l'équation du cercle en coordonnées obliques est une équation du second degré, dans laquelle les termes en* x^2 *et en* y^2 *ont pour coefficients l'unité, et le terme en* xy *deux fois le cosinus de l'angle des axes.*

87—Réciproquement, toute équation de cette forme représente une circonférence du cercle, quand elle représente un lieu. En effet, on peut déterminer les trois constantes α, β, r^2, de manière à identifier les équations (3) et (4). L'équation (3), développée, s'écrit

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta-2(\alpha+\beta\cos\theta)x-2(\beta+\alpha\cos\theta)y$$
$$+(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta-r^2)=0.$$

On identifiera cette équation à l'équatiou (4) en posant

$$\alpha+\beta\cos\theta=-\frac{a}{2},$$

$$\beta+\alpha\cos\theta=-\frac{b}{2},$$

$$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta-r^2=c.$$

Les deux premières relations donnent pour α et β des valeurs finies, puisque le dénominateur $1-\cos^2\theta$ ou $\sin^2\theta$ est différent de zéro. La troisième donne

$$r^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta-c.$$

Marquons le point C, qui a pour coordonnées α et β. Le premier membre de l'équation (3) représente le carré de la distance d'un point quelconque M au point C. Si l'on trouve pour r^2 une quantité positive, l'équation sera vérifiée par les coordonnées de tous les points du plan distants du point C de la longueur r; elle représente donc une circonférence de cercle. Si l'on trouve pour r^2 une quantité nulle, la distance MC devant être nulle, l'équation ne sera vérifiée que par les coordonnées du point C; elle représente un seul point. Enfin, si l'on trouve par r^2 une quantité négative, l'équation n'est vérifiée par aucun système de valeurs réelles de x et y, ou par les coordonnées

d'aucun point du plan ; car le carré de la distance d'un point au point C ne peut être égal à une quantité négative.

Au lieu de déterminer le centre C du cercle par ses coordonnées α et β, il est plus commode de le déterminer par les projections orthogonales de la droite OC sur les deux axes. Appelons α' et β' ces deux projections OD et OE (fig. 50), prises avec le signe convenable, et exprimons que la projection de la droite OC sur l'un ou l'autre axe est égale à celle de la ligne brisée OPC ou OQC ; nous aurons

$$\alpha' = \alpha + \beta \cos \theta, \quad \beta' = \beta + \alpha \cos \theta ;$$

il en résulte

$$\alpha' = -\frac{a}{2}, \quad \beta' = -\frac{b}{2}.$$

Après avoir porté sur les axes à partir de l'origine les longueurs α' et β', on élèvera par les points D et E des perpendiculaires aux axes ; l'intersection des deux perpendiculaires déterminera le centre C.

PROBLÈME I.

88—*Trouver l'équation de la tangente à une courbe quelconque.*

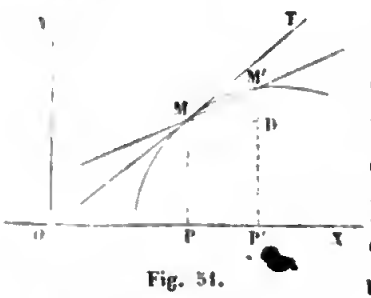


Fig. 51.

Nous avons défini (n° 27) de cette manière la tangente à une courbe quelconque (fig. 51) : si l'on fait tourner autour du point M une sécante MM' de manière à ce que le point M' se rapproche indéfiniment du point M, la sécante tend vers une position limite MT ; cette droite MT est dite *tangente* à la courbe au point M.

Soient x et y les coordonnées du point de contact M, $x+h$ et $y+k$ celles du point voisin M' ; la sécante MM' a pour coefficient angulaire $\frac{k}{h}$, le rapport de la différence des ordonnées à la différence des abscisses. Quand le point M' se rapproche indéfiniment du point M, les deux accroissements h et k tendent simultanément vers zéro, et le coefficient angulaire de la tan-

gente est égal à la limite du rapport $\frac{k}{h}$, c'est-à-dire à la dérivée de l'ordonnée considérée comme une fonction de l'abscisse.

Si l'équation de la courbe est résolue par rapport à y et mise sous la forme $y=f(x)$; la tangente aura pour coefficient angulaire $y'=f'(x)$. Lorsque l'équation de la courbe $f(x,y)=0$ n'est pas résolue, on obtient la dérivée y' de la fonction implicite y à l'aide de l'équation

$$f'_x+y'f'_y=0,$$

dans laquelle f' et f'_y désignent les dérivées partielles de la fonction $f(x,y)$ par rapport à x ou par rapport à y. On en déduit

$$(5)\quad y'=-\frac{f'_x}{f'_y}.$$

PROBLÈME II.

89—*Trouver l'équation de la tangente au cercle.*

Appliquons la formule précédente au cercle, et, pour simplifier, supposons les axes rectangulaires et l'origine des coordonnées placés au centre du cercle; le cercle a pour équation

$$(6)\quad x^2+y^2-r^2=0;$$

Si l'on résout par rapport à y, l'équation devient

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2};$$

en prenant la dérivée de cette fonction, on a

$$y'=\frac{-x}{\pm\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{-x}{y}.$$

En conservant l'équation non résolue et appliquant la formule (5), on obtient la même valeur

$$y'=-\frac{x}{y}.$$

Le rayon qui va du centre au point de contact ayant pour coefficient angulaire $\frac{y}{x}$, on voit que la tangente est perpendiculaire au rayon.

Dans ce qui suit, nous désignerons par x et y les coordon-

nées du point de contact M, et par X et Y les coordonnées variables d'un point quelconque de la tangente. La tangente, ayant pour coefficient angulaire $-\frac{x}{y}$ et passant par le point M, est représentée par l'équation

$$Y-y=-\frac{x}{y}(X-x),$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$xX+yY=x^2+y^2.$$

Puisque le point M est sur le cercle, ses coordonnées vérifient l'équation du cercle, et l'on a

$$x^2+y^2=r^2.$$

L'équation de la tangente devient ainsi

$$(7)\ Xx+yY=r^2.$$

PROBLÈME III.

90—*Mener une tangente au cercle par un point extérieur* P.

Supposons toujours le cercle rapporté à deux axes rectangulaires menés par le centre, et représenté par l'équation

$$(6)\ x^2+y^2=r^2.$$

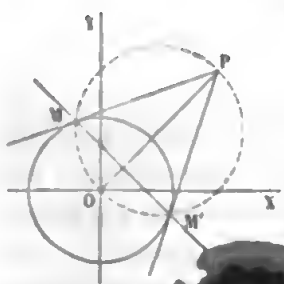


Fig. 52.

Désignons par x_1 et y_1 les coordonnées du point donné P (fig. 52). Soit PM une tangente menée par le point P; la question revient à déterminer le point de contact M, dont nous appellerons x et y les coordonnées [illegible]. Le point M étant sur le cercle, ses coordonnées vérifient l'équation (6). La tangente au point M a pour équation

$$xX+yY=r^2.$$

Cette tangente passant par le point P, son équation doit être vérifiée par les coordonnées de ce point, ce qui donne la seconde équation

$$(8)\ xx_1+yy_1=r^2.$$

En résolvant ces deux équations simultanées, on obtiendrait les valeurs des inconnues x et y.

La résolution des deux équations (6) et (8) revient à chercher les points d'intersection de deux lignes. La première équation représente le cercle proposé; la seconde une ligne droite. Chercher les valeurs de x et de y qui vérifient à la fois ces deux équations, c'est chercher les points d'intersection de la droite et du cercle. Cette droite MM′ coupe le cercle en deux points M et M′; c'est la droite des contacts. L'équation (8) de la droite des contacts a même forme que l'équation (7) de la tangente; seulement, les coordonnées du point de contact sont remplacées par celles du point P.

91—On sait que, lorsqu'on a deux équations simultanées

$$A=0,$$
$$B=0,$$

à deux inconnues x et y, si l'on remplace l'une d'elles par l'équation $mA+nB=0$, que l'on obtient en ajoutant membre à membre les deux équations proposées, après les avoir multipliées par des nombres arbitraires m et n, on forme un nouveau système d'équations

$$A=0,$$
$$mA+nB=0,$$

équivalent au système proposé. Cela signifie géométriquement que les points d'intersection des deux lignes représentées par les deux équations proposées sont les mêmes que les points d'intersection de l'une d'elles par la troisième ligne.

Nous avons dit que les points de contact sont donnés par l'intersection du cercle proposé et de la droite des contacts. En retranchant les deux équations (6) et (8) membre à membre, on obtient la nouvelle équation

$$x^2+y^2-x_1x-y_1y=0,$$

ou

$$\left(x-\frac{x_1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1}{2}\right)^2=\frac{x_1^2+y_1^2}{4},$$

qui peut remplacer l'équation (8); cette nouvelle équation représente le cercle décrit sur la droite OP comme diamètre;

les points où ce cercle coupe le cercle proposé sont les points de contact. On retrouve ainsi la construction de la géométrie élémentaire.

PROBLÈME IV.

92—*Mener une tangente parallèle à une droite donnée.*

Au cercle

$$(6)\quad x^2+y^2=r^2$$

on veut mener une tangente parallèle à la droite

$$y=mx,$$

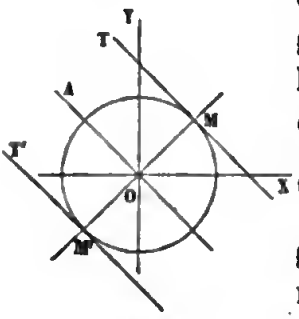


Fig. 53.

que l'on peut supposer passant par l'origine (fig. 53). Si l'on désigne par x et y les coordonnées du point de contact M, on sait que le coefficient angulaire de la tangente est égal à $-\frac{x}{y}$; pour que la tangente MT soit parallèle à la droite donnée, il faut que son coefficient angulaire soit égal à m; on aura donc la condition

$$-\frac{x}{y}=m,$$

ou

$$(9)\quad y=-\frac{1}{m}x.$$

D'ailleurs les coordonnées du point M vérifient l'équation du cercle. Ces coordonnées seront donc déterminées par les deux équations simultanées (6) et (9), et par conséquent les points de contact M et M' seront donnés par l'intersection du cercle et de la droite qui représente l'équation (9); cette droite MM' est un diamètre perpendiculaire à la droite donnée OA.

93—On peut traiter la question d'une autre manière, et ceci nous fournira l'occasion de présenter l'équation de la tangente au cercle sous une nouvelle forme.

Proposons-nous d'abord de chercher les points d'intersection d'un cercle

$$x^2+y^2=r^2$$

et d'une droite quelconque

$$y = mx + k.$$

En éliminant y, on obtient l'équation du second degré

$$x^2 + (mx + k)^2 = r^2,$$

ou

$$(m^2 + 1)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0.$$

Quand cette équation a ses racines réelles, la droite coupe le cercle en deux points dont les abscisses sont les racines de cette équation. Si les racines deviennent égales entre elles, les deux points d'intersection se confondent, et la sécante devient tangente au cercle. Enfin, quand les racines sont imaginaires, la droite ne rencontre pas le cercle.

Ainsi, la condition pour que la droite soit tangente au cercle est

$$m^2k^2 - (m^2 + 1)(k^2 - r^2) = 0,$$

ou

$$k^2 = r^2(m^2 + 1).$$

L'équation de la droite, dans laquelle on remplace k par sa valeur, devient

$$(10) \quad y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1};$$

Cette équation, qui renferme un paramètre arbitraire m, représente toutes les tangentes au cercle.

Si l'on donne la direction de la tangente, le coefficient angulaire m étant connu, on a immédiatement les équations des deux tangentes parallèles à la direction donnée.

PROBLÈME V.

94—*Trouver le lieu des points dont [illegible]tances à deux points fixes s[illegible]e elles dans un rapport do[illegible]*

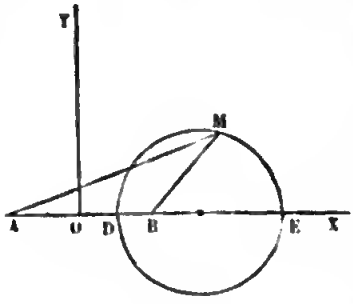


Fig. 54.

Soient A et B les deux points donnés (fig. 54); prenons pour axes des x la droite AB et pour axe des y la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB. Si l'on appelle $2a$ la distance AB, $\frac{m}{n}$ le rapport donné,

et si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point quelconque du lieu, ce lieu aura pour équation

$$\frac{y^2+(x+a)^2}{y^2+(x-a)^2}=\frac{m^2}{n^2},$$

ou

$$(11)\quad x^2+y^2-2ax\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}+a^2=0.$$

C'est un cercle dont le centre est situé sur l'axe des x; les deux extrémités du diamètre DE sont les points qui divisent la droite AB dans le rapport de m à n.

PROBLÈME VI.

95—*Trouver les points d'intersection de deux cercles.*

Soient

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$
$$x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$$

les équations des deux cercles en coordonnées rectangulaires. Les points d'intersection seront donnés par ces deux équations simultanées. On peut remplacer le second cercle par la droite

$$(12)\quad (a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0,$$

que l'on obtient en retranchant ces équations membre à membre, et la question est ramenée à chercher les points d'intersection du premier cercle par cette droite. Si la droite coupe le cercle, les deux cercles auront deux points d'intersection, et l'équation (12) représentera la sécante commune. Si la droite devient tangente au cercle, les deux points d'intersection se confondent, et les deux cercles sont tangents; l'équation (12) représente dans ce cas la tangente commune. Enfin, lorsque la droite ne rencontre pas le cercle, les deux cercles n'ont pas de point commun.

96—Cependant l'équation (12) a, dans tous les cas, une signification géométrique qu'il est bon de remarquer.

Les équations des deux cercles peuvent être mises sous la forme :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0,$$
$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2-r'^2=0.$$

D'un point extérieur quelconque P menons aux cercles des tangentes PM, PM'; on a

$$\overline{PM}^2=\overline{PC}^2-\overline{CM}^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2,$$
$$\overline{PM'}^2=\overline{PC'}^2-\overline{C'M'}^2=(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2-r'^2;$$

les premiers membres des équations des cercles, dans lesquelles x et y sont quelconques, représentent les carrés des longueurs des tangentes PM et PM', menées d'un point P du plan. Or, en égalant à zéro la différence, on écrit que ces deux carrés sont égaux entre eux, et par conséquent que les deux tangentes PM et PM' sont égales. Ainsi, l'équation (12) obtenue de cette manière représente le lieu des points d'où les tangentes menées aux deux cercles sont égales entre elles. Cette droite est ce qu'on appelle l'*axe radical* des deux cercles.

97—Étant donnés trois cercles

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$
$$x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0,$$
$$x^2+y^2+a''x+b''y+c''=0,$$

les axes radicaux des cercles combinés deux à deux ont pour équation

$$(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0,$$
$$(a'-a'')x+(b'-b'')y+(c'-c'')=0,$$
$$(a''-a)x+(b''-b)y+c''-c)=0.$$

La troisième équation étant une combinaison des deux autres, il en résulte que les trois axes radicaux passent par un même point.

CHAPITRE III.

Lieux géométriques.

98—Soient

$$(1)\quad F(x,y,a)=0,$$
$$(2)\quad F_1(x,y,a)=0,$$

deux équations renfermant une constante ou *paramètre* arbi-

traire a. Si l'on attribue à ce paramètre une valeur particulière, on obtient deux lignes A et B qui se coupent en un point M, dont les coordonnées x et y vérifient les deux équations simultanées (1) et (2). Si l'on attribue au paramètre a une autre valeur a', les deux lignes occuperont les positions A′, B′ et le point d'intersection viendra en M′; une troisième valeur a'' attribuée au paramètre donnera les deux lignes A″, B″ et le point d'intersection M″, et ainsi de suite. Concevons que l'on fasse varier le paramètre a d'une manière continue, les deux lignes A et B se déplaceront dans le plan d'une manière continue et le point d'intersection M décrira une ligne PQ. Cette ligne PQ est ce qu'on appelle le lieu du point d'intersection des lignes variables A et B.

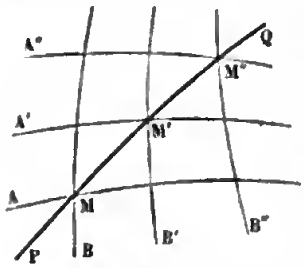


Fig 55.

On obtiendra l'équation de la ligne PQ, lieu du point M, en éliminant le paramètre a entre les deux équations (1) et (2). En effet, éliminer a entre les deux équations (1) et (2), c'est trouver une équation

$$(3)\quad f(x, y) = 0,$$

ne renfermant plus la lettre a, et telle que, si l'on remplace l'une des deux équations proposées, par exemple l'équation (2), par l'équation (3), le système des deux équations (1) et (3) soit équivalent au système des deux équations (1) et (2). On dit que deux systèmes d'équations sont équivalents, lorsqu'ils sont vérifiés par les mêmes valeurs attribuées aux lettres. Quand on attribue à a une valeur particulière, les coordonnées x et y du point M, jointes à cette valeur de a, forment un système de valeurs des trois quantités x, y, a vérifiant à la fois les deux équations (1) et (2); puisque le système des équations (1) et (3) est équivalent au précédent, ces valeurs vérifient aussi l'équation (3); cette dernière équation, ne renfermant pas a, est vérifiée par les coordonnées de l'un quelconque des points du lieu. Ainsi l'équation (3) représente une ligne fixe sur laquelle se meut le point M, quand on fait varier le paramètre a.

Digitized by Google

Réciproquement, tout point M, dont les coordonnées x et y vérifient l'équation (3), appartient au lieu. Car, si l'on détermine la valeur de a qui vérifie l'équation (1), dans laquelle on attribue à x et y les valeurs précédentes, on obtient un système de valeurs des trois quantités x, y, a vérifiant le système des équations (1) et (3). Le système des équations (1) et (2) étant équivalent à celui-là, l'équation (2) sera vérifiée par les mêmes valeurs ; on obtiendra ainsi deux lignes A et B passant par le point M.

Il peut arriver cependant qu'à un système de valeurs réelles de x et de y vérifiant l'équation (3) corresponde une valeur de a, pour laquelle les équations (1) et (2) ne représentent pas de lignes, c'est ce qui aurait lieu, par exemple, si la valeur a était imaginaire. Mais, dans tous les cas, les valeurs de x et y satisferont aux deux équations (1) et (2).

99—Considérons maintenant deux équations

$$(4)\quad F(x, y, a, b)=0,$$

$$(5)\quad F_1(x, y, a, b)=0,$$

renfermant deux paramètres variables a et b, liés entre eux par l'équation

$$(6)\quad \varphi(a, b)=0.$$

Si l'on attribue au paramètre a une valeur particulière, l'équation (6) détermine une valeur correspondante de b, et les deux équations (4) et (5) représentent deux lignes A et B se coupant au point M. Le paramètre a variant d'une manière continue, le paramètre b variera aussi d'une manière continue, ainsi que les deux lignes A et B, et le point d'intersection M décrira une ligne PQ.

On obtiendra l'équation de cette ligne en éliminant les deux paramètres a et b entre les trois équations (4), (5), (6). En effet, éliminer a et b entre ces trois équations, c'est trouver une équation

$$(7)\quad f(x, y)=0,$$

ne renfermant plus a et b, et qui, jointe aux deux équations (4) et (5), forme un système équivalent au système des trois

équations proposées. Quand on attribue à a et b des valeurs vérifiant l'équation (6), les coordonnées x et y du point M, jointes à ces valeurs de a et de b, forment un système de valeurs des quatre quantités x, y, a, b vérifiant à la fois les trois équations (4), (5), (6). Puisque le système des trois équations (4), (5), (7) est équivalent au système précédent, ces valeurs vérifient aussi l'équation (7); cette dernière équation, étant indépendante de a et de b, est vérifiée par les coordonnées x et y de tous les points du lieu. Réciproquement, tout point M dont les coordonnées x et y vérifient l'équation (7), appartient au lieu; car, si l'on détermine les valeurs de a et de b qui vérifient les deux équations (4) et (5), dans lesquelles on attribue à x et à y les valeurs précédentes, on obtient un système de valeurs des quatre quantités x, y, a, b vérifiant le système des trois équations (4), (5), (7). Le système des trois équations (4), (5), (6) étant équivalent à celui-là, l'équation (6) sera aussi vérifiée, et l'on aura deux lignes A et B passant par le point M.

100—Il est facile de généraliser ce qui précède. Supposons que les deux équations

$$(8)\quad F(x, y, a, b, c, \ldots\ldots, h)=0,$$
$$(9)\quad F_1(x, y, a, b, c, \ldots\ldots, h)=0,$$

renferment n paramètres variables $a, b, c, \ldots\ldots, h$, liés entre eux par $n-1$ équations de condition

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(a, b, c, \ldots\ldots, h)=0, \\ \varphi_1(a, b, c, \ldots\ldots, h)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{(n-2)}(a, b, c, \ldots\ldots, h)=0. \end{array}\right.$$

Si l'on attribue au paramètre a une valeur particulière, les valeurs correspondantes des $n-1$ autres paramètres sont déterminées par les $n-1$ équations (10), et les deux équations (8) et (9) représentent deux lignes A et B se coupant en un point M. Quand on fait varier le paramètre a, les autres varient simultanément, et le point M décrit un lieu. On obtient l'équation de

ce lieu en éliminant les n paramètres entre les $n+1$ équations (8), (9), (10).

101—Nous avons supposé que les deux paramètres variables a et b contenus dans les équations (4) et (5) sont liés par une équation de condition (6). Si ces deux paramètres étaient liés par deux équations de condition, leurs valeurs seraient déterminées par ces deux équations, les deux courbes A et B seraient fixes, ainsi que le point M, et il n'y aurait pas de lieu. Si, au contraire, les deux paramètres n'étaient liés par aucune relation, on pourrait leur attribuer des valeurs telles que les deux courbes A et B se coupassent en un point donné à volonté dans le plan, et le point M décrirait tout le plan.

En général, quand les équations des deux lignes A et B renferment n paramètres variables, il faut, pour que le point d'intersection décrive un lieu, c'est-à-dire une ligne, que ces n paramètres soient liés par $n-1$ équations de condition. Ces $n-1$ équations de condition, avec les équations des deux lignes A et B, forment de la sorte un système de $n+1$ équations, renfermant $n+2$ quantités variables $a, b, c....., h, x, y$, dont une seule est arbitraire. Si le nombre des équations de condition n'était que $n-2$, ces équations, avec les deux équations des lignes A et B, formeraient un système de n équations entre $n+2$ quantités variables; deux quelconques de ces quantités, par exemple x et y, pourraient être prises à volonté.

Il peut arriver que les deux lignes variables A et B se coupent en plusieurs points; le calcul précédent donne le lieu décrit par l'ensemble de ces points.

PROBLÈME I.

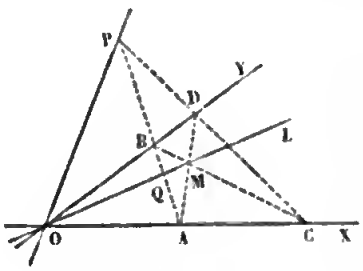


Fig. 56.

102—*Étant donnés un angle* XOY *et un point fixe* P *dans le plan* (fig. 56), *par le point* P *on mène une sécante fixe* PBA *et une sécante mobile* PDE, *on mène les droites* AD, BC; *trouver le lieu de leur point de rencontre* M.

Prenons les droites OX et OY pour axes des coordonnées, et désignons par x_1 et y_1 les coordonnées du point P. La sécante fixe PBA aura une équation de la forme

$$y-y_1=a\ (x-x_1),$$

dans laquelle le paramètre a a une valeur constante. De même la sécante mobile PDC sera représentée par l'équation

$$y-y_1=m\ (x-x_1),$$

dans laquelle m désigne un paramètre variable. Si, dans chacune de ces équations, on fait successivement $y=0$, $x=0$, on obtient les coordonnées des points où ces droites rencontrent les axes des coordonnées,

$$\text{A},\quad y=0,\quad x=x_1-\frac{y_1}{a},$$

$$\text{B},\quad x=0,\quad y=y_1-ax_1,$$

$$\text{C},\quad y=0,\quad x=x_1-\frac{y_1}{m},$$

$$\text{D},\quad x=0,\quad y=y_1-mx_1.$$

En appliquant la formule du n° 67, on a les équations des droites AD, CB,

$$(1)\quad \frac{x}{x_1-\frac{y_1}{a}}+\frac{y}{y_1-mx_1}=1,$$

$$(2)\quad \frac{x}{x_1-\frac{y_1}{m}}+\frac{y}{y_1-ax_1}=1.$$

Les valeurs de x et y, qui vérifient les deux équations simultanées (1) et (2), sont les coordonnées du point d'intersection M des deux droites AD et BC; ces coordonnées varient avec le paramètre arbitraire m. Si l'on retranche les deux équations membre a membre, on obtient l'équation

$$x\left(\frac{m}{y_1-mx_1}-\frac{a}{y_1-ax_1}\right)+y\left(\frac{1}{y_1-mx_1}-\frac{1}{y_1-ax_1}\right)=0,$$

ou plus simplement

$$(3)\quad \frac{m-a}{(y_1-mx_1)(y_1-ax_1)}\quad (y_1x+x_1y)=0$$

qui, jointe à l'équation (1), forme un système équivalent au

système des deux équations (1) et (2). Tant que le paramètre m a une valeur différente de a, le premier facteur étant différent de zéro, les coordonnées x et y du point M doivent annuler le second facteur. Ainsi, les coordonnées de tous les points du lieu vérifient l'équation

$$y_1 x + x_1 y = 0,$$

ou

$$(4) \quad \frac{y}{x} = -\frac{y_1}{x_1}.$$

Ce lieu est une droite OL passant par l'origine.

Quand $m = a$, le système des deux équations (1) et (2) se réduit à l'équation (1); les deux droites coïncident et leur point d'intersection est un point quelconque de la sécante fixe PA.

Si l'on avait fait l'élimination d'une autre manière, si l'on avait, par exemple, tiré la valeur de m de l'équation (1) pour la porter dans l'équation (2), on aurait obtenu une équation du second degré, dont le premier membre serait décomposable en deux facteurs du premier degré et qui, par conséquent, représenterait deux droites, le lieu OL et la droite PA. Cette équation serait

$$(y_1 x + x_1 y)\,[y - y_1 - a(x - x_1)] = 0.$$

On voit que l'équation (4) ne contient pas le paramètre constant a; il en résulte que le lieu est indépendant de la position particulière attribuée à la sécante fixe PA. On en conclut le théorème suivant : Étant donnés un angle XOY et un point fixe P dans son plan, si, par le point P, on mène deux sécantes quelconques PA, PC, le point de rencontre M des deux droites AD et BC est toujours situé sur une même droite OL.

Nous remarquons encore que l'équation (4) ne dépend que du rapport $\frac{y_1}{x_1}$, c'est-à-dire du coefficient angulaire de la droite OP. Ainsi le lieu OL restera le même, si l'on déplace le point P sur la droite OP passant à l'origine.

PROBLÈME II.

103 — *Les côtés d'un triangle variable* ABC *tournent autour de trois points fixes* P, P′, P″, *placés en ligne droite, tandis que deux des sommets* A *et* B *glissent sur deux droites fixes* ID *et* IE; *trouver le lieu décrit par le troisième sommet* C (fig. 57).

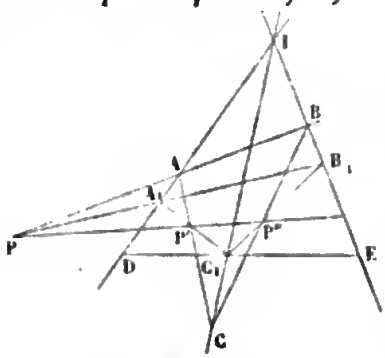


Fig. 57.

Prenons pour axe des x la droite des pivots PP′P″, et pour axe des y une droite quelconque menée par le point P. Soient p' et p'' les abscisses des points P′ et P″,

$$(1)\quad y+ax+\alpha=0,$$
$$(2)\quad y+bx+\beta=0$$

les équations des droites fixes IA, IB. Pour construire une position particulière de la figure variable, on peut mener par le point P une droite arbitraire PAB, puis joindre les points A et B respectivement aux points P′ et P″. Nous prendrons pour variable arbitraire le coefficient d'inclinaison m de la droite PAB; l'équation de cette droite sera alors

$$(3)\quad y-mx=0.$$

La droite AP′, passant par le point de rencontre des droites (1) et (3), est représentée par une équation de la forme

$$(y-mx)+\lambda(y+ax+\alpha)=0;$$

on détermine λ en exprimant que cette droite passe par le point P′, c'est-à-dire que son équation est vérifiée par $x=p'$, $y=0$; il en résulte $\lambda=\dfrac{mp'}{ap'+\alpha}$; par suite l'équation de la droite AP′ est

$$(4)\quad y-mx+\frac{mp'}{ap'+\alpha}(y+ax+\alpha)=0.$$

L'équation de BP″ se déduit de la précédente par le changement de p' en p'', de a en b et de α en β, ce qui donne

$$(5)\quad y-mx+\frac{mp''}{bp''+\beta}(y+bx+\beta)=0.$$

Les valeurs de x et de y qui vérifient simultanément les équations (4) et (5) sont les coordonnées du point C, coordonnées qui dépendent de la variable arbitraire m. Si l'on retranche membre à membre les deux équations (4) et (5), on obtient l'équation

$$(6) \quad m\left[\frac{p'(y+ax+\alpha)}{ap'+\alpha}-\frac{p''(y+bx+\beta)}{bp''+\beta}\right]=0$$

qui, jointe à l'équation (4), forme un système équivalent au système des deux équations (4) et (5). Tant que m est différent de zéro, les coordonnées x et y du point M doivent annuler le second facteur. Ainsi les coordonnées de tous les points du lieu vérifient l'équation

$$(7) \frac{p'(y+ax+\alpha)}{ap'+\alpha}=\frac{p''(y+bx+\beta)}{bp''+\beta}.$$

Ce lieu est une droite; l'équation (7) étant vérifiée par les valeurs de x et y qui satisfont à la fois aux équations (1) et (2), on en conclut que cette droite passe par le point de concours I des deux droites données IA et IB.

Quand $m=0$, les deux équations (4) et (5) se confondent, les deux droites AP′ et BP″ coïncident et leur point d'intersection est un point quelconque de la droite PP′. Faisant l'élimination d'une autre manière, on aurait obtenu l'équation du second degré

$$y\left[\frac{p'(y+ax+\alpha)}{ap'+\alpha}-\frac{p''(y+bx+\beta)}{bp''+\beta}\right]=0,$$

représentant à la fois le lieu IC et la droite PP′.

104—Corollaire I. On déduit de ce qui précède la solution de ce problème : Inscrire dans un triangle IDE un second triangle dont les côtés passent respectivement par trois points donnés P, P′, P″ en ligne droite. Si l'on conçoit un triangle variable dont les côtés soient assujettis à passer par les points P, P′, P″, tandis que deux des sommets A et B glissent sur les droites ID, IE, le lieu du troisième sommet C est une droite IC. Le point de rencontre C_1 des droites IC et DE est donc l'un des sommets du triangle cherché; les droites C_1P', C_1P'' donnent

les deux autres sommets A_1 et B_1. Il est à remarquer que cette solution n'exige aucun autre instrument que la règle.

105—Corollaire II. On peut aisément généraliser le problème précédent. Considérons un quadrilatère dont les quatre côtés pivotent autour de quatre points fixes P, P′, P″, P‴ situés en ligne droite, tandis que trois sommets A, B, C glissent sur trois droites fixes R, S, T; et proposons de chercher le lieu décrit par le quatrième sommet (fig. 58).

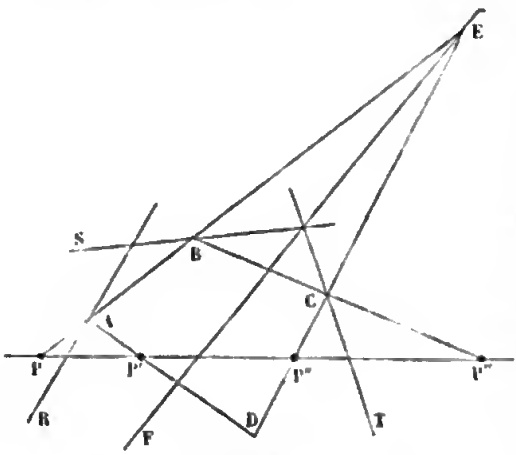


Fig. 58.

Les trois côtés du triangle BCE pivotent autour des trois points fixes P, P″, P‴, tandis que deux sommets B et C glissent sur les droites fixes S et T; le sommet E décrit donc une droite EF. D'après cela les trois côtés du triangle AED pivotent autour des trois points fixes P, P′, P″, tandis que deux sommets A et E glissent sur les deux droites R et EF; le sommet D décrit donc une ligne droite.

Du quadrilatère on passera de la même manière au pentagône. Ainsi, quand les n côtés d'un polygone pivotent autour des n points fixes situés en ligne droite, tandis que $n-1$ sommets glissent sur $n-1$ droites fixes, le n^e sommet décrit une ligne droite.

On en déduit le moyen d'inscrire dans un polygône de n côtés un autre polygone de n côtés passant respectivement par n points fixes en ligne droite.

PROBLÈME III.

106—*Étant donné un triangle* ABA′, *par un point fixe* O *pris sur un côté* AA′, *on mène une sécante mobile* OCC′, *on fait passer un premier cercle par les trois points* OAC *et un second cercle*

par les trois points OA′C′ ; *trouver le lieu du point d'intersection* M *de ces deux cercles* (fig. 59).

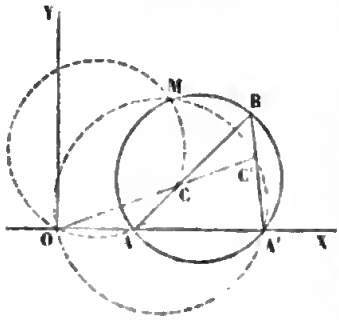


Fig. 59.

Prenons la droite OA′ pour axe des x et une perpendiculaire OY menée par le point O pour axe des y. En appelant α et α' les abscisses des points A et A′, les deux droites fixes AB, A′B seront représentées par les équations

$$(1)\quad y = a(x-\alpha),$$
$$(2)\quad y = a'(x-\alpha'),$$

et la sécante mobile OC par l'équation

$$(3)\quad y = mx,$$

dans laquelle m désigne un paramètre variable. On obtient les coordonnées du point C en résolvant les deux équations simultanées (1) et (3), ce qui donne

$$x = \frac{a\alpha}{a-m},\quad y = \frac{ma\alpha}{a-m}.$$

Tout cercle passant par les deux points O et A a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0,$$

dans laquelle le paramètre β est arbitraire. On détermine ce paramètre en exprimant que le cercle passe par le point C, ce qui donne

$$\beta = \frac{\alpha(am+1)}{a-m};$$

le cercle qui passe par les trois points O,A,C a donc pour équation

$$(4)\quad x^2 + y^2 - \alpha x - \frac{\alpha(am+1)}{a-m}y = 0.$$

Si, dans cette équation, on remplace α et a par α' et a', on obtiendra évidemment l'équation du cercle qui passe par les trois points O, A′, C′,

$$(5)\quad x^2 + y^2 - \alpha' x - \frac{\alpha'(a'm+1)}{a'-m}y = 0.$$

Pour avoir l'équation du lieu du point d'intersection M des

deux cercles, il faut éliminer le paramètre variable m entre les deux équations (4) et (5). En égalant les valeurs de m tirées des équations (4) et (5), on obtient l'équation

$$\frac{a(x^2+y^2-\alpha x)-\alpha y}{(x^2+y^2-\alpha x)+a\alpha y}=\frac{a'(x^2+y^2-\alpha' x)-\alpha' y}{(x^2+y^2-\alpha' x)+a'\alpha' y},$$

qui, mise sous forme entière, s'écrit

$$(a-a')\left[(x^2+y^2-\alpha x)(x^2+y^2-\alpha' x)+\alpha\alpha' y^2\right]$$
$$+(1+aa')y\left[\alpha'(x^2+y^2-\alpha x)-\alpha(x^2+y^2-\alpha' x)\right]=0,$$

ou

$$(a-a')\left[(x^2+y^2)^2-(\alpha+\alpha')x(x^2+y^2)+\alpha\alpha'(x^2+y^2)\right]$$
$$+(1+aa')(\alpha'-\alpha)y(x^2+y^2)=0;$$

en mettant x^2+y^2 en facteur commun, et divisant par $a-a'$, on a l'équation

$$(6)\quad (x^2+y^2)\left[x^2+y^2-(\alpha+\alpha')x-\frac{(1+aa')(\alpha-\alpha')}{a-a'}y+\alpha\alpha'\right]=0.$$

Cette équation se décompose en deux ; l'une,

$$x^2+y^2=0,$$

donne le point O où se coupent toujours les deux cercles mobiles; l'autre

$$(7)\quad (x^2+y^2)-(\alpha+\alpha')x-\frac{(1+aa')(\alpha-\alpha')}{a-a'}y+\alpha\alpha'=0$$

est l'équation du lieu du point M. Ce lieu est un cercle.

On reconnaît *à priori* que les trois points B, A, A′ appartiennent au lieu. Car, si la sécante mobile passe par le point B, les deux cercles se coupent en B; ce point fait partie du lieu. Supposons que la sécante devienne parallèle à la droite A′B, le point C′ s'éloignant à l'infini, le second cercle coïncide avec la droite OA′, qui coupe en A le premier cercle ; on obtient de même le point A′, quand la sécante devient parallèle à AB. Il est d'ailleurs facile de vérifier sur l'équation (7) que le lieu passe par les trois points B, A, A′. Ainsi le lieu demandé est le cercle circonscrit au triangle ABA′.

PROBLÈME IV.

107—*Étant donnés un cercle et un point fixe* P *à l'intérieur du cercle, autour du point* P *on fait tourner un angle droit*

APB; *on joint par une droite les deux points* A *et* B, *où les côtés de l'angle droit rencontrent le cercle, et on abaisse du point* P *une perpendiculaire* PM *sur la droite* AB; *trouver le lieu du pied* M *de la perpendiculaire* (fig. 60).

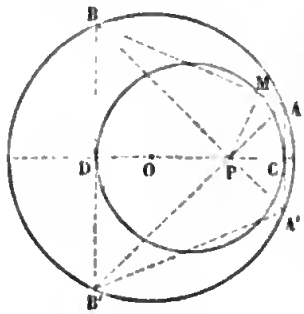


Fig. 60.

Prenons pour axe des x le diamètre OP, pour axe des y un diamètre perpendiculaire; le cercle donné est représenté par l'équation

$$(1)\quad x^2+y^2=r^2.$$

Soit

$$(2)\quad y=ax+b$$

l'équation de la sécante AB. Si l'on élimine y entre les deux équations (1) et (2), on obtient une équation du second degré

$$(3)\quad (1+a^2)x^2+2abx+b^2-r^2=0,$$

dont les racines sont les abscisses x' et x'' des points A et B; les ordonnées y' et y'' auront pour valeurs $ax'+b$, $ax''+b$. Si l'on appelle α la longueur constante OP, les deux droites PA, PB ont pour coefficients angulaires

$$\frac{y'}{x'-\alpha},\qquad \frac{y''}{x''-\alpha},$$

ou

$$\frac{ax'+b}{x'-\alpha},\qquad \frac{ax''+b}{x''-\alpha};$$

l'angle APB étant droit, on a la condition

$$\frac{(ax'+b)(ax''+b)}{(x'-\alpha)(x''-\alpha)}=-1,$$

qui s'écrit

$$(1+a^2)x'x''+(ab-\alpha)(x'+x'')+b^2+\alpha^2=0;$$

si l'on remplace $x'+x''$ et $x'x''$ par leurs valeurs tirées de l'équation (3), cette équation devient

$$(4)\quad (1+a^2)(\alpha^2-r^2)+2b(a\alpha+b)=0.$$

Telle est la relation qui existe entre les deux paramètres variables a et b.

La perpendiculaire PM, abaissée du point P sur la droite AB, a pour équation

$$(5)\quad y=-\frac{1}{a}(x-\alpha).$$

Le point M est défini par les équations (2) et (5), dans lesquelles les paramètres variables a et b satisfont à l'équation (4); on obtient l'équation du lieu du point M en éliminant ces deux paramètres entre les trois équations (2), (4), (5). De l'équation (5) on tire

$$a=-\frac{x-\alpha}{y};$$

de l'équation (2) on déduit ensuite

$$b=\frac{y^2+(x-\alpha)x}{y}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (4), on obtient l'équation

$$(6)\quad \left[y^2+(x-\alpha)^2\right]\left[x^2+y^2-\alpha x+\frac{\alpha^2-r^2}{2}\right]=0.$$

Cette équation se décompose en deux; l'une

$$y^2+(x-\alpha)^2=0$$

donne le point P; l'autre

$$(7)\quad x^2+y^2-\alpha x+\frac{\alpha^2-r^2}{2}=0$$

représente le lieu cherché.

Il est évident que le point P n'appartient pas au lieu géométrique tel qu'on l'a défini; mais il est facile de comprendre comment l'analyse l'introduit dans le résultat. Les coordonnées $x=\alpha$, $y=0$ du point P vérifient l'équation (5), quels que soient les paramètres; on pourra donc déduire des deux équations (2) et (4) des valeurs correspondantes des deux paramètres a et b; on trouve ainsi $a=\pm\sqrt{-1}$, $b=-a\alpha$. C'est une application de la remarque faite au nº 98.

L'équation (7) montre que le lieu est un cercle ayant son centre sur la droite OP. Pour le construire, il suffit de déterminer les deux extrémités du diamètre CD; si l'on mène des droites AB′, BA′ faisant des angles de 45° avec le diamètre OP, les cordes AA′, BB′, étant perpendiculaires sur ce diamètre, donneront les deux points C et D.

108 — Remarque. La circonstance que nous venons de signaler se présentera toutes les fois que l'une des deux courbes variables A et B, dont l'intersection donne un point M du lieu (nº 98),

passera par un point fixe P. En effet, supposons que les équations des deux lignes contiennent n paramètres variables liés entre eux par $n-1$ relations; si les coordonnées x_1 et y_1 d'un point fixe P satisfont à l'équation de la ligne A, quelles que soient les valeurs des paramètres, en remplaçant x et y par x_1 et y_1 dans l'équation de la ligne B, on aura une équation qui, jointe aux $n-1$ équations de condition entre les paramètres, formera un système de n équations pour déterminer les valeurs de ces paramètres. Ce point P sera étranger au lieu géométrique, si aux valeurs trouvées ne correspondent pas de lignes.

PROBLÈME V.

109—*Trouver le lieu des points tels que les perpendiculaires abaissées de chacun d'eux sur les trois côtés d'un triangle* ABC *soient en ligne droite.*

Supposons la figure rapportée à deux axes rectangulaires quelconques, et soient

$$(1)\ y-ax-\alpha=0,\quad (2)\ y-bx-\beta=0,\quad (3)\ y-cx-\gamma=0,$$

les équations des côtés BC, CA, AB. Les coordonnées x_1, y_1 du pied de la perpendiculaire abaissée du point (x, y) sur la droite (1) sont données par les formules du n° 76

$$(4)\ x_1-x=\frac{y-ax-\alpha}{a^2+1}a,\quad y_1-y=\frac{y-ax-\alpha}{a^2+1}.$$

Les coordonnées (x_2, y_2), (x_3, y_3) des pieds des perpendiculaires abaissées du même point (x, y) sur les droites (2) et (3) se déduisent des formules analogues

$$(5)\ x_2-x=\frac{y-bx-\beta}{b^2+1}b,\quad y_2-y=\frac{y-bx-\beta}{b^2+1},$$

$$(6)\ x_3-x=\frac{y-cx-\gamma}{c^2+1}c,\quad y_3-y=\frac{y-cx-\gamma}{c^2+1}.$$

On obtient ensuite l'équation du lieu cherché en égalant entre eux les deux rapports $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$, rapports que l'on peut écrire ainsi $\frac{(y_2-y)-(y_1-y)}{(x_2-x)-(x_1-x)}$, $\frac{(y_3-y)-(y_2-y)}{(x_3-x)-(x_2-y)}$. On arrive finalement à l'équation

$$(7)\quad (y-ax-\alpha)(y-bx-\beta)(a-b)(c^2+1)$$
$$+(y-bx-\beta)(y-cx-\gamma)(b-c)(a^2+1)$$
$$+(y-cx-\gamma)(y-ax-\alpha)(c-a)(b^2+1)=0.$$

En développant l'équation (7), qui est du second degré, on voit que les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux et que celui de xy est nul ; le lieu est donc un cercle. D'ailleurs, cette équation est vérifiée par les coordonnées des points de concours des droites données ; le lieu est donc le cercle circonscrit au triangle.

PROBLÈME VI.

110—*Démontrer que, quand deux triangles* ABC, A'B'C' *ont leurs sommets correspondants* (A, A'), (B, B'), (C, C') *situés sur trois droites* OA, OB, OC *passant par un même point* O, *les points d'intersection* M,N,P *des côtés correspondants* (BC, B'C'), (CA, C'A'), (AB, A'B') *sont situés sur une même ligne droite* (fig. 61).

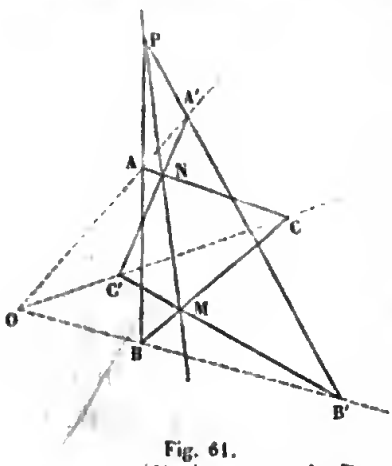


Fig. 61.

Supposons la figure rapportée à un système quelconque de coordonnées rectilignes, et soient

$$(1)\ A=0,\quad (2)\ B=0,\quad (3)\ P=0,\quad (4)\ P'=0$$

les équations des droites OA, OB, PA, PA', les lettres A, B, P, P' désignant quatre fonctions linéaires des coordonnées x et y. Les équations des droites AC, BC seront de la forme

$$(5)\ P+\lambda A=0,\quad (6)\ P+\mu B=0,$$

et celles des droites A'C', B'C' de la forme

$$(7)\ P'+\lambda' A=0,\quad (8)\ P'+\mu' B=0.$$

Les quatre constantes λ, μ, λ', μ' sont liées entre elles par une relation résultant de ce que les trois points O, C, C' sont en ligne droite. On obtient cette relation de la manière suivante : l'équation

$$(9)\ \lambda A-\mu B=0,$$

que l'on obtient en retranchant les équations (5) et (6) membre à membre, représente une droite passant par le point C; cette même droite passe d'ailleurs par le point O; c'est donc la droite OC. On a de même l'équation de la droite OC′

$$(10)\quad \lambda' A - \mu' B = 0.$$

Pour que les deux droites (9) et (10) se confondent, il faut que l'on ait

$$(11)\quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda'}{\mu'}.$$

Telle est la relation cherchée.

Si l'on multiplie les deux membres des équations (5) et (7) respectivement par λ' et λ et que l'on retranche, on obtient l'équation

$$(12)\quad \lambda' P - \lambda P' = 0,$$

qui représente une droite passant par le point N; cette même droite passe évidemment par le point P. En opérant d'une façon analogue sur les équations (6) et (8), on trouve pour l'équation de MP

$$(13)\quad \mu' P - \mu P' = 0.$$

Les équations (12) et (13) sont identiques si la condition (11) est satisfaite; donc alors les trois points M,N,P sont en ligne droite.

On démontre de la même manière, que réciproquement, si les points M,N,P sont en ligne droite, les droites AA′, BB′, CC′ passent par un même point.

EXERCICES.

1° Trouver sur la droite qui joint deux points donnés un point tel que ses distances aux deux points donnés soient entre elles dans le rapport inverse de deux quantités données.

2° Étant donnés dans un plan n points A, B, C,.... et n quantités m', m'', m''',.... qui correspondent à ces n points; sur la droite AB on prend un point N_1, tel que les distances de ce point aux deux premiers points soient dans le rapport de m'' à m'; puis sur la droite N_1C qui joint le point N_1 au troisième point C on prend un point N_2 tel que ses distances aux

points N_1 et C soient dans le rapport de m''' à $m'+m''$; puis sur la droite N_2D qui joint le point N_2 au quatrième point D un point N_3, tel que ses distances aux points N_2 et D soient dans le rapport de m^{v} à $m'+m''+m'''$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit arrivé au dernier point donné; trouver les coordonnées du dernier point division que l'on appelle *centre des distances proportionnelles*.

Lorsque les multiplicateurs m', m'', m''',.... sont égaux entre eux, le dernier point de division s'appelle *centre des moyennes distances*.

3° Comme application, trouver le centre des distances proportionnelles des trois sommets d'un triangle, et en déduire le centre de gravité, le centre du cercle inscrit, le point de rencontre des trois hauteurs, et le centre du cercle circonscrit.

4° Trouver le lieu des points tels que la somme des produits des carrés des distances de chacun d'eux à n points donnés par des quantités constantes m', m'', m''',.... soit égale à une quantité donnée.

5° Lieu des centres des cercles qui sont vus de deux points donnés sous des angles donnés.

6° Lieu des centres des cercles qui rencontrent, en des points diamétralement opposés, deux cercles donnés.

7° Lieu des points tels que la somme des distances de chacun d'eux à deux droites et en général à plusieurs droites données soit constante.

8° Sur deux droites rectangulaires OX, OY on construit un rectangle variable OACB ayant un périmètre donné $2a$, la perpendiculaire menée au sommet C sur la diagonale AB passe par un point fixe.

9° Ayant fait la figure qui sert à démontrer le théorème du carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, démontrer que les deux droites qui joignent les extrémités de l'hypoténuse aux sommets des carrés construits sur les côtés opposés se coupent sur la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.

10° D'un point fixe P on mène des tangentes aux cercles

qui passent par deux points donnés; trouver le lieu du point où la corde des contacts rencontre le diamètre qui passe au point P.

11° Étant donné un hexagone régulier ABCDEF, on joint AC et AE; par le centre on mène une sécante quelconque qui coupe les deux droites AC et AE aux points G et H; on joint BG et FP; trouver le lieu du point de rencontre de ces deux droites.

12° Les circonférences décrites sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet, comme diamètres, ont même axe radical.

13° Etant données cinq droites, on en prend quatre qui forment un quadrilatère complet, dans lequel les milieux des trois diagonales sont en ligne droite. Les cinq droites ainsi obtenues se coupent au même point.

14° Etant donnes trois points A,B,C, et deux droites X,Y; sur AB comme diagonale, on construit un parallélogramme dont les côtés sont parallèles à X et Y; on opère de même avec B,C et C,A; les secondes diagonales des trois parallélogrammes passent au même point.

15° Etant données quatre droites A,B,C,D, on en prend trois pour former un triangle, dont on détermine le point de concours des hauteurs; les quatre points ainsi obtenus sont en ligne droite.

16° Trouver l'équation du cercle circonscrit a trois droites données par leurs équations, en coordonnées rectangulaires.

17° Étant donnés deux cercles fixes, deux cercles variables sont tangents entre eux et aux précédents; trouver le lieu du point de contact des cercles variables.

18° On prend quatre points arbitrairement sur une circonférence, les bissectrices des trois couples de droites qui passent par ces quatre points sont parallèles deux à deux.

19° Lieu du point tel que les cordes de contact des tangentes menées de ce point à trois cercles donnés se coupent en un même point.

Digitized by Google

LIVRE III

COURBES DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE I.

Construction des lignes du second degré.

111—L'équation générale du second degré entre les deux variables x et y est de la forme

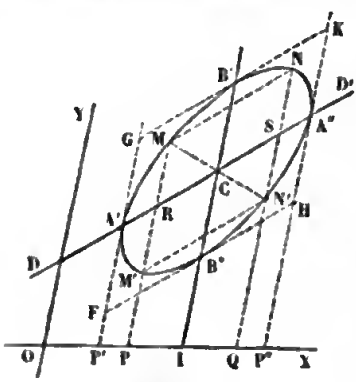


Fig. 62.

(1) $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$; elle renferme cinq paramètres arbitraires, les rapports de cinq coefficients au sixième. Supposons d'abord que l'un des coefficients de x^2 et de y^2, C par exemple, ne soit pas nul, et résolvons l'équation par rapport à y; on a

$$y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P},$$

en posant $M=B^2-4AC$, $N=BE-2CD$, $P=E^2-4CF$. Construisons la droite DD′ représentée par l'équation

$$y=-\frac{Bx+E}{2C}.$$

Pour chaque valeur de x, il faut, à partir de la droite DD′, porter de part et d'autre sur l'ordonnée une longueur égale à

$$Y=\frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P}.$$

La droite DD′ (fig. 62) qui divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe OY, est un *diamètre* de la courbe; la quantité Y est la valeur de l'ordonnée comptée à partir du

diamètre. La construction du lieu est ainsi ramenée à l'étude du trinôme

$$Mx^2+2Nx+P;$$

et comme la forme du lieu dépend principalement du signe du coefficient M, on distingue trois cas principaux.

GENRE ELLIPSE.

112—Considérons d'abord le cas où le coefficient M, qui est égal à B^2-4AC, a une valeur négative. L'ordonnée Y n'est réelle que si le trinôme a une valeur positive. Pour reconnaître le signe du trinôme, quand x varie, on lui donne diverses formes; c'est pourquoi le cas que nous examinons se subdivise à son tour en trois autres.

1° $N^2-MP>0$. Les deux racines de l'équation

$$Mx^2+2Nx+P=0$$

sont réelles et inégales. Désignons par x' la plus petite et par x'' la plus grande; le trinôme peut s'écrire

$$M(x-x')(x-x''),$$

ou

$$-M(x-x')(x''-x);$$

il est positif, et par conséquent l'ordonnée Y est réelle pour toutes les valeurs de x comprises entre x' et x''; le trinôme est au contraire négatif et l'ordonnée imaginaire pour toute valeur de x plus petite que x', ou plus grande que x''.

Prenons sur l'axe des x deux points P' et P'' ayant pour abscisses x' et x'', et par les points P' et P'' menons des parallèles $P'A'$, $P''A''$ à l'axe des y; la courbe sera tout entière comprise entre ces deux parallèles. L'abscisse x variant de x' à x'', l'ordonnée Y conserve une valeur finie, et part de la valeur zéro pour revenir à zéro; on a ainsi une une courbe fermée qui passe par les points A' et A'', et à laquelle on a donné le nom d'*ellipse*.

Une valeur de x comprise entre x' et x'' sera l'abscisse d'un point P compris entre P' et P'', et la valeur correspondante de Y sera égale à

$$\frac{1}{2C}\sqrt{(-M).\,P'P.\,PP''}.$$

Le produit variable $PP' \times PP''$ des deux segments de la droite $P'P''$ est égal au carré de l'ordonnée du cercle décrit sur $P'P''$ comme diamètre; quand le point P va de P' au point I, milieu de $P'P''$, l'ordonnée du cercle, et par suite la quantité Y qui lui est proportionnelle, va en augmentant; elle diminue au contraire quand le point P va de I en P''. La quantité Y acquiert donc sa valeur maximum, quand le point P est en I, c'est-à-dire quand $x = \frac{x'+x''}{2} = -\frac{N}{M}$; cette valeur maximum est égale à $\frac{(x''-x')\sqrt{-M}}{4C}$. A partir du point C, milieu du diamètre $A'A''$, portons sur l'ordonnée, et de part et d'autre, une longueur égale à cette valeur maximum; nous aurons deux points B' et B'' de la courbe, et, en menant par ces points des parallèles au diamètre, nous formerons un parallélogramme FGKH, dans lequel sera comprise l'ellipse.

Il est clair qu'à deux points P et Q également distants du milieu I correspondent des valeurs égales de Y; ces valeurs, portées de part et d'autre du diamètre DD', donnent les quatre points M, M', N, N'. Les deux triangles CRM, CSN' étant égaux, les trois points M, C, N' sont en ligne droite et le point C est le milieu de MN'; ainsi tous les points de la courbe sont deux à deux symétriques par rapport au point C, milieu du diamètre $A'A''$, et par conséquent ce point C est le *centre* de l'ellipse. On voit également que les deux droites MN, $M'N'$ sont parallèles au diamètre $A'A''$ et partagées chacune en parties égales par la droite $B'B''$; cette droite est un second diamètre. Les deux diamètres $A'A''$, $B'B''$, qui partagent chacun en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre, sont dits *diamètres conjugués* de l'ellipse.

113—Remarque. Si l'on désigne par K^2 le nombre positif $\frac{N^2-MP}{M^2}$, on a

$$Mx^2+2Nx+P=M\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)^2-\frac{N^2-MP}{M^2}\right]=M\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)^2-K^2\right],$$

et l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\left(2Cy+Bx+E\right)^2+(-M)\left(x+\frac{N}{M}\right)^2+MK^2=0.$$

Le premier terme est le carré d'un polynôme contenant les deux variables x et y, le second le carré d'un polynôme qui ne contient que la variable x, et le troisième un nombre négatif.

114—2° $N^2-MP=0$. Les deux racines x' et x'' sont égales, et l'on a

$$x'=x''=-\frac{N}{M},$$

$$Y=\frac{x-x'}{2C}\sqrt{M};$$

le coefficient M étant négatif, la quantité Y est imaginaire pour toutes les valeurs de x, excepté pour $x=x'$, et alors $Y=0$. L'équation n'admettant qu'un système de solutions réelles, le lieu est un point unique C placé sur la droite DD'. L'équation (1) dans ce cas prend la forme

$$\left(2Cy+Bx+E\right)^2+(-M)\left(x+\frac{N}{M}\right)^2=0.$$

115—3° $N^2-MP<0$. Si l'on pose $K^2=\frac{MP-N^2}{M^2}$, le trinôme $Mx^2+2Nx+P$ peut s'écrire

$$M\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)^2+K^2\right].$$

Ce trinôme est négatif, et par conséquent Y imaginaire pour toutes les valeurs de x; l'équation, n'ayant pas de solution réelle, ne représente aucun lieu géométrique. Dans ce cas l'équation (1) prend la forme

$$\left(2Cy+By+E\right)^2+(-M)\left(x+\frac{N}{M}\right)^2-MK^2=0;$$

son premier membre est une somme de trois carrés.

Digitized by Google

GENRE HYPERBOLE.

116—Considérons maintenant le cas où le coefficient M a une valeur positive; ce cas se subdivise aussi en trois autres.

1° $N^2 - MP > 0$. Le trinôme $Mx^2 + 2Nx + P$, que l'on met sous la forme $M(x-x')(x-x'')$, est positif et par suite Y est réelle quand x varie de x'' à $+\infty$ et de x' à $-\infty$; d'ailleurs Y varie en même temps de 0 à ∞. Prenons, comme précédemment, sur l'axe des x deux points P′ et P″ ayant pour abscisses x' et x'', et menons par ces points deux parallèles P′A′, P″A″ à l'axe des y; la courbe sera située en dehors de ces parallèles; elle se compose de deux parties séparées l'une de l'autre et formées chacune de deux branches infinies (fig. 63); on a donné à cette courbe le nom d'*hyperbole*. Si, à partir du point I, milieu de P′P″, on prend deux longueurs égales IP et IQ de part et d'autre sur l'axe des x, les valeurs correspondantes de Y sont égales; et l'on voit que le point C, milieu de A′A″, est le centre de la courbe, et que les deux droites DD′ et IC sont deux diamètres conjugués.

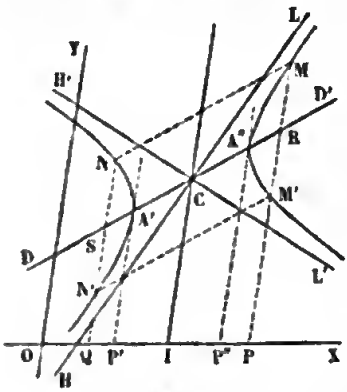


Fig. 63.

117—Désignons par K^2 la quantité positive $\frac{N^2 - MP}{M^2}$, la valeur de y peut s'écrire

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{M\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 - K^2\right]}.$$

Lorsque x a une valeur numérique très-grande, le premier terme de la parenthèse placée sous le signe radical est très-grand par rapport au second; si l'on réduit la parenthèse à son premier terme, on a une valeur approchée de y, savoir

$$y_1 = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}.$$

L'équation précédente définit deux droites distinctes, qui se

coupent en un point du diamètre DD′ dont l'abscisse est égale à $-\frac{N}{M}$, c'est-à-dire à la demi-somme des abscisses des points P′ et P″; ce point est donc le centre C de la courbe. Considérons la branche de courbe A″M; si C est positif, cette branche est déterminée par l'équation

$$y=-\frac{Bx+E}{2C}+\frac{1}{2C}\sqrt{M\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)^2-K^2\right]},$$

dans laquelle on fait varier x de x'' à $+\infty$; prenons en même temps la droite CL qui a pour équation

$$y_1=-\frac{Bx+E}{2C}+\frac{1}{2C}\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}.$$

Pour une valeur quelconque de x supérieure à x'', l'ordonnée de la courbe est inférieure à celle de la droite; ainsi la branche A″M est comprise dans l'angle LCD′. La différence y_1-y des ordonnées qui correspondent à une même abscisse a pour valeur

$$y_1-y=\frac{1}{2C}\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}-\sqrt{M\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)^2-K^2\right]}\right]$$

$$=\frac{MK^2}{2C}\,\frac{1}{\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}+\sqrt{M\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)^2-K^2\right]}}.$$

Quand x augmente indéfiniment, le dénominateur augmente indéfiniment, et par conséquent la différence y_1-y tend vers zéro. La droite CL, dont s'approche indéfiniment la branche de courbe A″M, est dite *asymptote* de cette branche de courbe. On verrait de même que les branches A″M′, A′N, A′N′ sont comprises dans les angles L′CD′, H′CD, HCD et ont pour asymptotes les droites CL′, CH′, CH.

Dans le cas que nous étudions maintenant, l'équation (1) se met sous la forme

$$\left(2Cy+Bx+E\right)^2-M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2+MK^2=0,$$

et les deux asymptotes sont représentées par l'équation

$$\left(2Cy+Bx+E\right)^2-M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2=0.$$

Il est bon d'observer que les coefficients angulaires de ces deux droites sont donnés par l'équation

$$m = -\frac{B}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{B^2 - 4AC},$$

ou

$$Cm^2 + Bm + A = 0;$$

qui s'obtient en remplaçant dans les termes du second degré de l'équation (1) x par 1 et y par m.

118—2° $N^2 - MP < 0$. Si l'on pose $\frac{MP - N^2}{M^2} = K^2$, on a

$$Mx^2 + 2Nx + P = M\left[\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + K^2\right].$$

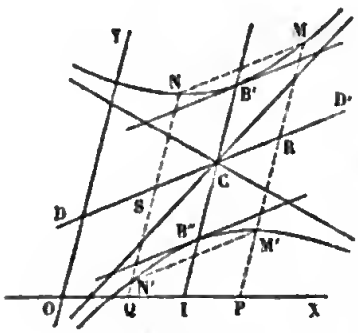


Fig. 64.

La valeur de Y est réelle pour toutes les valeurs de x et ne s'annulle jamais; Y acquiert sa valeur minimum $\frac{1}{2C}K\sqrt{M}$ pour $x = -\frac{N}{M}$. Soit I (fig. 64) le point de l'axe des x dont l'abscisse est $-\frac{N}{M}$; menons IC parallèle à l'axe OY et prenons $CB' = CB'' = \frac{K\sqrt{M}}{2C}$; les deux points B′ et B″ appartiennent au lieu. Quand x varie de $-\frac{N}{M}$ à $+\infty$, ou de $-\frac{N}{M}$ à $-\infty$, la valeur de Y croît indéfiniment; si donc par les points B′ et B″ on mène des parallèles au diamètre DD′, on voit que la courbe se compose de deux parties situées l'une au-dessus de la parallèle supérieure, l'autre au-dessous de la parallèle inférieure; chacune est formée de deux branches infinies; on donne encore à cette courbe le nom d'*hyperbole*.

Si l'on donne à x les deux valeurs $x = -\frac{N}{M} \pm \alpha$, ce qui revient à porter à partir du point I les deux distances $IP = IQ = \alpha$, les valeurs correspondantes de Y sont égales;

il en résulte que le point C est centre de la courbe, et que les deux droites DD′, IC, sont deux diamètres conjugués.

On reconnaît également que les deux droites

$$y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M},$$

qui se coupent au centre, sont asymptotes des branches infinies.

Dans le cas qui nous occupe l'équation (1) peut s'écrire sous la forme

$$\left(2Cy+Bx+E\right)^2-M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2-MK^2=0;$$

les deux asymptotes sont données par l'équation

$$\left(2Cy+Bx+E\right)^2-M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2=0,$$

et les coefficients angulaires de ces droites par l'équation

$$Cm^2+Bm+A=0.$$

119—3° $N^2-MP=0$. On a alors

$$Y=\frac{1}{2C}\sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2}=\frac{\sqrt{M}}{2C}\left(x+\frac{N}{M}\right),$$

et,

$$y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{\sqrt{M}}{2C}\left(x+\frac{N}{M}\right).$$

Le lieu se compose de deux droites qui se coupent sur le diamètre DD′. Dans ce cas l'équation (1) pouvant se mettre sous la forme

$$\left(2Cy+Bx+E\right)^2-M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2=0,$$

ou

$$\left[2Cy+Bx+E+\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}\right]\left[2Cy+Bx+E-\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}\right]=0,$$

son premier membre est le produit de deux facteurs du premier degré.

Digitized by Google

GENRE PARABOLE.

120—Supposons enfin que le coefficient M soit nul.

La valeur de Y se réduit à

$$Y=\frac{1}{2C}\sqrt{2Nx+P}.$$

Nous subdiviserons ce cas en plusieurs autres.

1° $N>0$. Si l'on pose $-\frac{P}{2N}=x'$, on aura

$$Y=\frac{1}{2C}\sqrt{2N(x-x')}.$$

Quand x varie de x' à $+\infty$, la quantité Y est réelle et varie de 0 à $+\infty$; mais elle est imaginaire pour les valeurs de x inférieures à x'. Si donc, par le point P′, dont l'abscisse est x', on mène P′A′ parallèle à l'axe des y, on voit que la courbe est tout entière située à droite de cette parallèle; elle passe par le point A′ et elle est formée de deux branches situées de part et d'autre du diamètre DD′ (fig. 65), on a donné à cette courbe le nom de *parabole*.

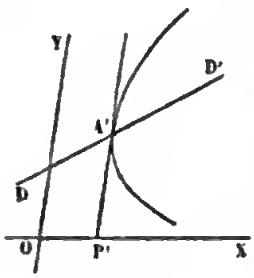


Fig. 65.

2° $N<0$. La quantité Y est réelle quand x varie de x' à $-\infty$; la courbe passe par le point A′ et s'étend à l'infini du côté des x négatives; on l'appelle aussi parabole.

3° $N=0$. La valeur de y se réduit à

$$y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{P}.$$

Si P est positif, cette équation représente deux droites parallèles au diamètre DD′ et situées à égale distance de ce diamètre. Si $P=0$, ces deux parallèles se confondent avec le diamètre; enfin si P est négatif, l'équation n'a pas de solution réelle.

Dans le cas où $M=0$, l'équation (1) peut se mettre sous l'une des trois formes

$$(2Cy+Bx+E)^2+2Nx+P=0,$$
$$(2Cy+Bx+E)^2+P=0,$$
$$(2Cy+Bx+E)^2=0.$$

121—Nous avons supposé dans ce qui précède que le coefficient C est différent de zéro, lorsque le coefficient C est nul, et le coefficient A différent de zéro, on pourrait résoudre l'équation par rapport à x et construire le lieu comme précédemment; le premier terme du trinôme placé sous le radical ayant pour coefficient B^2, et par conséquent ayant une valeur positive ou nulle, le lieu sera du genre hyperbole ou du genre parabole; mais il est préférable de résoudre l'équation par rapport à la variable qui n'y entre qu'au premier degré; d'ailleurs cette nouvelle méthode est seule applicable quand les deux coefficients A et C sont nuls à la fois.

En ordonnant l'équation (1) par rapport à y on a

$$(Bx+E)y+Ax^2+Dx+F=0,$$

d'où

$$y=-\frac{Ax^2+Dx+F}{Bx+E}.$$

Supposons d'abord que B soit différent de zéro, et effectuons la division, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x jusqu'à ce que l'on arrive à un reste indépendant de x. Nous distinguerons deux cas suivant que le reste est différent de zéro ou égal à zéro. Dans le premier cas, on obtiendra un résultat de la forme

$$y=ax+b+\frac{r}{Bx+E}=ax+b+\frac{\frac{r}{B}}{x-\left(-\frac{E}{B}\right)}=ax+b+\frac{c}{x-d}.$$

Pour fixer les idées supposons $c>0$.

Construisons le lieu auxiliaire défini par l'équation

$$y=ax+b,$$

et posons

$$Y=\frac{c}{x-d}.$$

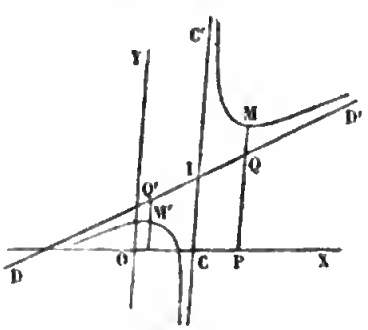


Fig. 66.

Le lieu auxiliaire est une droite DD' (fig. 66), et, pour chaque valeur de x, il faut augmenter l'ordonnée de cette droite d'une quantité QM égale à la valeur de Y.

Cette quantité devient infinie pour $x=d$; prenons donc un point C ayant pour abscisse d et menons CC′ parallèle à OY. Si l'on donne à x une valeur $d+x'$, x' étant positif, Y a une valeur positive, et quand x' tend vers zéro, Y augmente indéfiniment; si, au contraire, x augmente indéfiniment, Y tend vers zéro; on obtient ainsi une courbe comprise dans l'angle C′ID′ et formée de deux branches infinies asymptotes respectivement aux deux droites IC′ et ID′. Aux valeurs de x inférieures à d correspondent des valeurs négatives de Y, et l'on obtient une seconde courbe comprise dans l'angle CID, et dont les deux branches infinies sont asymptotes aux droites IC, ID. Si la constante c était négative, on obtiendrait encore une courbe formée de deux branches infinies; mais ces deux branches seraient situées dans les angles C′ID, CID′. Dans les deux cas, la courbe est une hyperbole; à deux valeurs de x' égales numériquement, mais de signes contraires, correspondent des valeurs de Y qui sont aussi égales et de signes contraires, et par suite deux points M et M′ symétriques par rapport au point I qui est centre de la courbe.

122—Lorsque le reste de la division est nul, on a

$$Ax^2+Dx+E=-(Bx+E)(ax+b)$$

et l'équation proposée prend la forme

$$(y-ax-b)(Bx+E)=0;$$

elle se décompose en deux autres

$$y-ax-b=0, \quad Bx+E=0,$$

qui représentent deux droites, dont l'une est parallèle à l'axe des y.

Lorsque A est nul en même temps que C, il suffit de faire dans la discussion précédente $a=0$; la droite DD′ devient parallèle à l'axe des x; on obtient ainsi, soit une hyperbole ayant ses asymptotes parallèles aux axes des coordonnées, soit deux droites parallèles aux axes.

123—Supposons maintenant que le coefficient B soit égal à zéro. Le coefficient A est nécessairement différent de zéro,

autrement l'équation serait du premier degré. La valeur de y est de la forme

$$y = ax^2 + bx + c;$$

elle est réelle quelle que soit la valeur de x; en faisant varier x de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient une branche infinie; c'est une parabole.

124—Remarque. Dans la discussion de l'équation du second degré, nous avons rencontré trois espèces de courbes : des courbes fermées, des courbes à quatre branches infinies, et des courbes à deux branches infinies. Nous avons appelé ellipses toutes les courbes fermées fournies par l'équation du second degré; hyperboles toutes les courbes à quatre branches infinies; paraboles celles qui n'ont que deux branches infinies.

Nous avons vu au commencement de cet ouvrage (liv. I, chap. II) que les courbes désignées par les mêmes noms en Géométrie élémentaire, sont représentées par des équations du second degré. Nous verrons plus tard que réciproquement toutes les courbes représentées par l'équation du second degré jouissent des propriétés qui servent de définition en Géométrie élémentaire, de telle sorte que les deux modes de définition sont équivalents.

En résumant la discussion, on voit que c'est le signe de la quantité B^2-4AC qui indique l'espèce de la courbe représentée par l'équation du second degré; la courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que la quantité B^2-4AC est négative, positive ou nulle.

Toutefois il importe de se rappeler que l'équation ne représente pas toujours une courbe ni même un lieu; dans le cas où la quantité B^2-4AC est négative, l'équation représente une ellipse, ou un point, ou n'est vérifiée par les coordonnées d'aucun point du plan; dans le cas où la quantité B^2-4AC est positive, l'équation représente une hyperbole ou deux droites qui se coupent; enfin, dans le cas où $B^2-4AC=0$, on a une parabole, ou deux droites parallèles, ou une seule droite, ou rien.

Digitized by Google

EXERCICES.

1° Construire les courbes représentées par les équations

$$xy+2x-5y=0,$$
$$x^2+2xy+y^2+2x-7=0,$$
$$2y^2+7xy+3x^2-3y+x-2=0,$$
$$x^2+3xy-2x=0.$$
$$3x^2-5xy+2y^2+3x-2y=0,$$
$$5x^2+4xy+y^2-2x+5=0,$$
$$2x^2-2xy+y^2+2x+1=0,$$
$$x^2-2xy+y^2-2x+2y-8=0.$$

2° Lieu du point dont l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre les ordonnées correspondantes de deux droites données.

CHAPITRE II.

Centre, diamètres et axes des courbes du second degré.

CENTRE.

125—Nous avons appelé centre d'une courbe un point fixe C par rapport auquel tous les points de la courbe sont symétriques deux à deux. En discutant l'équation générale du second degré, nous avons reconnu que l'ellipse et l'hyperbole ont un centre. Nous nous proposons maintenant de rechercher directement le centre d'une courbe du second degré, sans résoudre l'équation. La méthode que nous suivrons repose sur le théorème suivant : c'est que, quand l'origine des coordonnées est centre d'une ligne du second degré, l'équation de la ligne ne contient pas de termes du premier degré.

Soit, en effet,

$$(1)\quad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

l'équation d'une ligne du second degré ayant l'origine pour

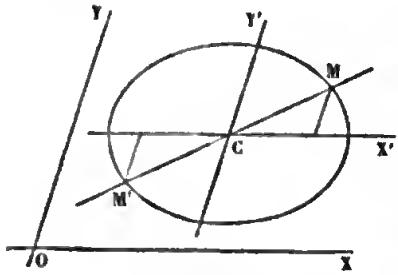


Fig. 67.

centre (fig. 67); l'équation d'une droite MM' menée par l'origine est de la forme

$$(2)\quad y = mx;$$

on obtient les coordonnées des points de rencontre M et M' en résolvant les équations simultanées (1) et (2). L'élimination de y donne l'équation

$$(3)\quad (A + Bm + Cm^2)\,x^2 + (D + Em)\,x + F = 0,$$

qui détermine les abscisses des deux points de rencontre. L'origine étant le milieu de la droite MM', l'équation précédente doit avoir ses deux racines égales et de signes contraires, ce qui exige que le coefficient de la première puissance de x soit égal à zéro; on a ainsi

$$(4)\quad D + Em = 0,$$

et comme cette condition doit être vérifiée pour une infinité de valeurs de m, on doit avoir séparément

$$(5)\quad D = 0, \quad E = 0.$$

Réciproquement, lorsque les conditions (5) sont remplies, l'équation (3) a ses deux racines égales et de signes contraires, quelle que soit la valeur de m, et par suite l'origine est centre de la courbe.

126—Pour reconnaître si un lieu du second degré a un centre, on transportera les axes parallèlement à eux-mêmes en un point arbitraire dont nous désignerons les coordonnées par a et b, puis on examinera si l'on peut déterminer ces quantités de manière que la nouvelle équation ne renferme pas de termes du premier degré.

Les formules pour déplacer les axes parallèlement à eux-mêmes sont

$$(6)\quad \begin{cases} x = a + x', \\ y = b + y'. \end{cases}$$

En substituant dans l'équation (1) on obtient l'équation nouvelle

$$(7)\quad Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+(2Aa+Bb+D)x'+(Ba+2Cb+E)y' \\ +Aa^2+Bab+Cb^2+Da+Eb+F=0,$$

dont il importe de remarquer la composition. Désignons, pour abréger, par $f(x, y)$ le premier membre de l'équation (1) qui est une fonction entière du second degré en x et y; dans l'équation (7) les termes du second degré sont les mêmes que dans l'équation (1); les termes du premier degré ont pour coefficients les dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$ prises par rapport aux variables x et y, et dans lesquelles on aurait remplacé ces variables par a et b; enfin, le terme constant est la valeur que prend le polynôme $f(x, y)$ pour $x=a$, $y=b$. L'équation (7) peut donc s'écrire ainsi

$$(8)\quad Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+f'_a(a,b)x'+f'_b(a,b)y'+f(a,b)=0.$$

En égalant à zéro les termes du premier degré, on obtient les deux équations

$$(9)\quad \begin{cases} 2Aa+Bb+D=0, \\ Ba+2Cb+E=0. \end{cases}$$

On voit par là *que l'on détermine le centre d'une courbe du second degré en résolvant les deux équations que l'on obtient en égalant à zéro les dérivées partielles du premier membre de l'équation proposée, prises par rapport à* x *et à* y.

127—Si l'on considère a et b comme des coordonnées variables, chacune des équations (9) définit une droite, et, il y a lieu de distinguer plusieurs cas.

1° $B^2-4AC \gtrless 0$. Les deux équations ont un système de solutions et un système unique; les deux droites se coupent et la ligne admet un centre et un centre unique dont les coordonnées sont

$$(10)\quad \begin{cases} a=\dfrac{2CD-BE}{B^2-4AC}, \\ b=\dfrac{2AE-BD}{B^2-4AC}. \end{cases}$$

2° $B^2-4AC=0$. Les droites (9) sont parallèles ou se confondent; dans le premier cas le lieu n'a pas de centre; dans

le second cas, il admet comme centre chacun des points de la droite définie par l'une des équations (9). Il est facile de voir que, dans ce dernier cas, s'il y a un lieu, ce lieu se compose nécessairement de deux droites parallèles. Soit, en effet, CC′ la droite, lieu des centres (fig. 68), et M un point appartenant au lieu; joignons le point M aux divers points de la droite CC′ et prolongeons chacune de ces droites d'une longueur égale à elle-même, les points N, N′, N″.... ainsi obtenus, appartiendront encore au lieu ; or, tous ces points sont situés sur une parallèle à CC′. En opérant de même avec le point N on aurait une seconde parallèle MM′. D'ailleurs l'équation (1) ne peut pas représenter d'autres points que ceux de ces deux droites ; autrement une droite rencontrerait le lieu en plus de deux points. Si le point M était situé sur la droite CC′, les deux parallèles se confondraient avec le lieu des centres.

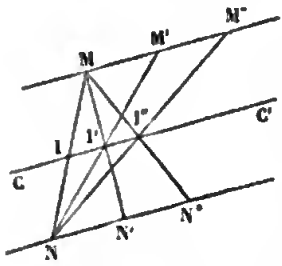


Fig. 68.

128—Lorsque la courbe admet un centre, si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point, l'équation se simplifie, puisque les termes du premier degré disparaissent. Appelons F_1 le terme constant dans la nouvelle équation, on a

$$(11)\quad F_1 = Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F,$$

a et b désignant les coordonnées du centre. Mais les quantités a et b satisfont aux équations (9); si l'on multiplie les deux membres de chacune d'elles respectivement par a et b et que l'on ajoute, il vient

$$2Aa^2 + 2Bab + 2Cb^2 + Da + Eb = 0,$$

d'où

$$Aa^2 + Bab + Cb^2 = -\frac{Da + Eb}{2};$$

substituant dans l'équation (11), on a

$$(12)\quad F_1 = F + \frac{Da + Eb}{2}.$$

Cette formule est plus simple que la première.

DIAMÈTRES.

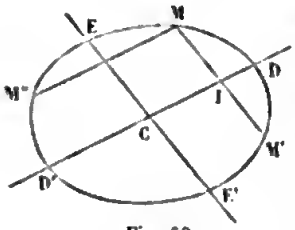


Fig. 69.

129—Si l'on coupe une courbe du second degré par une série de droites parallèles, le lieu des points milieux I des cordes MM' terminées aux deux points de rencontre est un *diamètre* de la courbe. Soit m le coefficient angulaire des cordes, et

$$(1)\quad f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

l'équation de la courbe. Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes en un point arbitraire I du plan, ayant pour coordonnées a et b, l'équation de la courbe devient (nº 126)

$$(2)\quad Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+f'_a(a,b)x'+f'_b(a,b)y'+f(a,b)=0.$$

Menons actuellement par l'origine I une parallèle MM' à la direction donnée, l'équation de cette paralèlle est

$$(3)\quad y'=mx'.$$

On obtient l'équation qui donne les abscisses des points de rencontre en éliminant y' entre les équations (2) et (3), ce qui conduit à l'équation du second degré

$$(4)\quad [A+Bm+Cm^2]x'^2+[f'_a(a,b)+f'_b(a,b)m]x'+f(a,b)=0.$$

Pour que l'origine I soit le milieu de la corde MM' (fig. 69), il faut que l'équation précédente ait ses racines égales et de signes contraires, c'est-à-dire que a et b vérifient la relation

$$(2Aa+Bb+D)+(Ba+2Cb+E)m=0;$$

cette relation devant être satisfaite par les coordonnées du point milieu de l'une quelconque des cordes considérées est l'équation du diamètre. Si l'on y remplace les coordonnées variables a et b par x et y, elle s'écrit

$$(5)\quad (2Ax+By+D)+(Bx+2Cy+E)m=0,$$

ou

$$f'_x(x,y)+mf'_y(x,y)=0.$$

L'équation (5) étant du premier degré, on en conclut que le diamètre correspondant à une série quelconque de cordes

parallèles est une droite DD'. Si l'on appelle m' le coefficient angulaire du diamètre, on a la relation

$$(6)\quad m' = -\frac{2A + Bm}{B + 2Cm}.$$

130—Remarque I. La direction du diamètre varie en général avec celle des cordes ; cependant lorsqu'on a

$$\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C} \quad \text{ou} \quad B^2 - 4AC = 0,$$

c'est-à-dire lorsque la courbe est une parabole, la valeur de m' est constante et égale à $-\frac{B}{2C}$. Ainsi tous les diamètres de la parabole sont parallèles entre eux.

131—Remarque II. Si le nombre donné m vérifiait la relation

$$(7)\quad A + Bm + Cm^2 = 0,$$

d'où

$$m = -\frac{B}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{B^2 - 4AC},$$

l'équation (4) s'abaisserait au premier degré; chacune des droites parallèles à la direction donnée ne couperait la courbe qu'en un point, et il n'y aurait pas lieu de chercher le diamètre correspondant à cette direction. Dans le cas de l'hyperbole, les racines de l'équation (7) donnent les directions des asymptotes; dans le cas de la parabole, l'équation (7) a ses racines égales et la valeur de m est le coefficient angulaire commun à tous les diamètres ; enfin, dans le cas de l'ellipse, la condition (7) n'est jamais vérifiée.

132—Remarque III. Les valeurs x et y qui satisfont aux équations simultanées

$$2Ax + By + D = 0,$$
$$Bx + 2Cy + E = 0,$$

vérifient l'équation (5) quelle que soit la valeur de m; donc, si le lieu a un centre unique, tous les diamètres passent par le

centre, et, s'il en a une infinité, tous les diamètres se confondent avec le lieu des centres.

Les deux équations qui déterminent le centre représentent deux diamètres ; le premier correspond aux cordes parallèles à l'axe des x, le second aux cordes parallèles à l'axe des y.

133—Remarque IV. Dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole, toute droite menée par le centre est un diamètre; car on peut disposer de m de manière que le coefficient m', donné par la formule (6), ait une valeur quelconque. Cependant, si la valeur obtenue pour m se réduisait à l'une des racines de l'équation (7), elle ne serait pas admissible, puisque les droites correspondantes ne donnent pas de diamètres; mais alors la valeur de m' est égale à celle de m; elle correspond à l'une des asymptotes.

DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

134—Supposons B^2-4AC différent de zéro. La relation entre m et m' peut s'écrire

$$(8)\quad 2Cmm'+B(m+m')+2A=0.$$

Imaginons que l'on mène des sécantes telles que MM″ parallèles au diamètre DD′ (fig. 69); soit m'' le coefficient angulaire du diamètre EE′, qui divise ces cordes en deux parties égales, on aura de même, entre la direction m' des cordes et la direction m'' du diamètre correspondant EE′, la relation

$$2Cm'm''+B(m'+m'')+2A=0;$$

cette équation et la précédente étant du premier degré par rapport à m'' et à m, on voit que l'on a $m''=m$. Les deux diamètres DD′, EE′, dont les coefficients angulaires sont m' et m, jouissent de cette propriété que chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre; on les a nommés pour cette raison *diamètres conjugués*.

L'ellipse et l'hyperbole ont une infinité de systèmes de diamètres conjugués. On peut prendre pour premier diamètre une droite quelconque menée par le centre, pourvu qu'elle

ne se confonde pas avec l'une des asymptotes, si la courbe est une hyperbole.

AXES.

135—Dans les courbes du second degré, les diamètres perpendiculaires aux cordes qu'ils divisent en deux parties égales, sont des axes de symétrie.

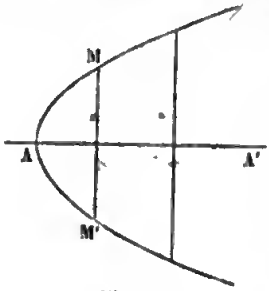


Fig. 70.

La parabole ayant tous ses diamètres parallèles, si l'on imagine une série de cordes MM' (fig. 70) perpendiculaires à la direction commune de tous les diamètres, le diamètre AA', qui divise ces cordes en deux parties égales, sera un axe de la courbe et ce sera le seul. Le coefficient angulaire des diamètres est $-\frac{B}{2C}$; donc, si les axes des coordonnées sont rectangulaires, l'axe de la courbe est le diamètre des cordes ayant pour coefficient angulaire $\frac{2C}{B}$; son équation (n° 129) est

$$B(2Ax+By+D)+2C(Bx+2Cy+E)=0.$$

Lorsque le lieu est une ellipse ou une hyperbole, à tout axe AA' (fig. 71) en correspond un second BB', tel que les deux axes forment un système de diamètres conjugués; la question est ainsi ramenée à la recherche des diamètres conjugués perpendiculaires entre eux. Si les axes sont rectangulaires, on obtient les coefficients angulaires des axes en joignant à l'équation (8) la suivante

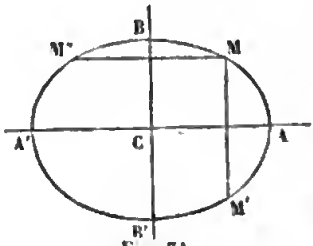


Fig. 71.

$$(9)\quad mm'=-1.$$

Des équations (8) et (9) on déduit

$$mm'=-1 \qquad m+m'=2\frac{C-A}{B};$$

ainsi m et m' sont les racines de l'équation du second degré

$$(10)\quad Bu^2+2(A-C)u-B=0.$$

L'ellipse et l'hyperbole ont deux axes. Si l'on avait $B=0$, $A=C$, les équations (8) et (9) seraient identiques, la courbe aurait une infinité de systèmes de diamètres conjugués rectangulaires; dans ce cas le lieu est un cercle.

136—Remarque. La direction des axes dépend uniquement des coefficients des termes du second degré; si la courbe est une hyperbole, ses axes ont donc mêmes directions que ceux du lieu

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=0,$$

qui est formé de deux droites parallèles aux asymptotes et menées par l'origine; il en résulte que les axes de l'hyperbole sont les bissectrices des angles formés par les asymptotes.

137—On appelle sommet d'une courbe du second degré les points où elle est rencontrée par un axe. La parabole, ayant un seul axe qui ne rencontre la courbe qu'en un point, n'a qu'un sommet; l'ellipse a quatre sommets et l'hyperbole deux.

ELLIPSE ET HYPERBOLE RAPPORTÉES A DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

138—Supposons que l'on prenne pour axe des x un diamètre d'une courbe du second degré, et pour axe des y une parallèle aux cordes que le diamètre divise en deux parties égales; l'équation

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

devra donner pour chaque valeur de x deux valeurs de y égales et de signes contraires, ce qui exige que l'on ait

$$Bx+E=0$$

quelle que soit la valeur de x, et par suite $B=0$, $E=0$. L'équation aura donc la forme

$$(11)\quad Ax^2+Cy^2+Dx+F=0.$$

Si la courbe est une ellipse ou une hyperbole, en prenant pour axe des y le diamètre conjugué du premier, on aura par la même raison $D=0$, ce qui réduit l'équation de la courbe à la forme

$$(12)\quad Ax^2+Cy^2+F=0.$$

PARABOLE RAPPORTÉE A UN DIAMÈTRE ET A LA TANGENTE A L'EXTRÉMITÉ DE CE DIAMÈTRE.

139—La parabole n'a pas de système de diamètres conjugués; mais si l'on prend pour origine le point où le diamètre rencontre la courbe, le terme constant F de l'équation (11) sera nul; d'ailleurs les droites parallèles à l'axe ne coupent la courbe qu'en un point, c'est-à-dire qu'à chaque valeur de y correspond une seule valeur de x, ce qui exige que $A=0$. Ainsi l'équation de la parabole sera de la forme

$$(13)\quad Cy^2+Dx=0.$$

Les formes (12) et (13) se rapportent à une infinité de systèmes d'axes obliques et à un seul système d'axes rectangulaires.

CHAPITRE III.

Réduction de l'Équation du second degré.

140—Pour étudier avec plus de facilité les propriétés d'une courbe du second degré, il importe de simplifier autant que possible son équation, en la rapportant à des axes de coordonnées convenablement choisis. Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'équation du second degré peut toujours être ramenée à l'une des deux formes

$$(\alpha)\quad Ax^2+Cy^2+F=0,$$

$$(\beta)\quad Cy^2+Dx=0.$$

Quand la courbe est une ellipse ou une hyperbole, on ramène son équation à la forme (α) en prenant pour axes des coordonnées un système de deux diamètres conjugués quelconques; généralement les coordonnées seront obliques; elles seront rectangulaires si l'on rapporte la courbe à ses deux axes. Quand la courbe est une parabole, on ramène son équation à la forme (β), en prenant pour axe des x un diamètre quelconque, et pour axe des y la tangente à l'extrémité de ce dia-

mètre ; si l'on veut que les coordonnées soient rectangulaires, on prendra pour axe des x l'axe de la courbe.

C'est à l'aide de ces deux formes d'équations, en coordonnées rectangulaires, que nous démontrerons la plupart des propriétés des courbes du second degré. Nous allons expliquer la marche à suivre pour effectuer la réduction de l'équation. Soit

$$(1)\quad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

une équation du second degré, en coordonnées rectangulaires ; si les coordonnées étaient obliques, on ferait une première transformation pour les rendre rectangulaires.

ELLIPSE ET HYPERBOLE.

141—Examinons d'abord le cas où la quantité B^2-4AC est différente de zéro ; la courbe admet un centre unique, dont les coordonnées a et b vérifient les deux équations (n° 126)

$$2Aa+Bb+D=0,$$
$$Ba+2Cb+E=0;$$

transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au centre C (fig. 72) ; nous savons que les termes du second degré ne changent pas, que ceux du premier degré disparaissent, et que le terme constant F_1 de la nouvelle équation est donné par la formule $F_1=\frac{Da+Eb}{2}+F$. L'équation de la courbe, par ce premier changement de coordonnées, se simplifie et devient

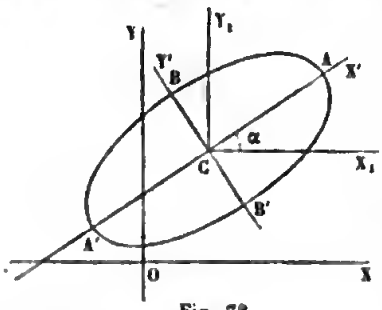


Fig 72.

$$(2)\quad Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+F_1=0.$$

Faisons maintenant tourner les axes des coordonnées supposés rectangulaires d'un angle α autour du centre C pour les faire coïncider avec les axes de la courbe ; les formules de transformation sont

$$x_1=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$$
$$y_1=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

En substituant dans l'équation (2), on obtient la nouvelle équation

$$(3)(A\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha)x'^2+(A\sin^2\alpha+C\cos^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha)y'^2$$
$$+[2(C-A)\sin\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]x'y'+F_1=0.$$

On peut disposer de l'angle α de manière à annuler le coefficient du terme en $x'y'$; pour cela, on posera

$$(4)\quad 2(C-A)\sin\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0,$$

ou

$$(5)\quad B\,tang^2\alpha+2(A-C)\,tang\,\alpha-B=0.$$

Cette équation du second degré est la même que l'équation (10) du n° 135, par laquelle nous déterminions la direction des axes de la courbe. Mais on peut résoudre l'équation (4) plus simplement en l'écrivant sous la forme

$$(C-A)\sin 2\alpha+B\cos 2\alpha=0,$$

d'où

$$(6)\quad tang\,2\alpha=\frac{B}{A-C}.$$

Si l'on exclut le cas où l'on a à la fois $B=0$, et $A=C$, ce qui est le cas du cercle, l'équation (6) admet une solution positive ω moindre que π, et les diverses valeurs de l'angle 2α qui satisfont à l'équation (6) sont comprises dans la formule

$$2\alpha=\omega+k\pi,$$

dans laquelle k désigne un nombre entier quelconque positif ou négatif; on en déduit

$$\alpha=\frac{\omega}{2}+k\frac{\pi}{2}.$$

Les diverses valeurs de α ne donnent que quatre directions différentes pour l'axe CX'; ces quatre directions sont opposées deux à deux et forment deux droites rectangulaires. Nous prendrons pour α la valeur $\frac{\omega}{2}$, qui est toujours positive et inférieure à $\frac{\pi}{2}$. Le terme en $x'y'$ disparaît dans l'équation (3); il reste à calculer les coefficients des termes en x'^2 et en y'^2. Si l'on pose

$$M = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$N = A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha;$$

on a

$$M + N = A + C,$$
$$M - N = (A - C)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2B\sin\alpha\cos\alpha$$
$$= (A - C)\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha.$$

L'équation (6) donne

$$\sin 2\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{B^2 + (A-C)^2}},\quad \cos 2\alpha = \frac{A - C}{\pm\sqrt{B^2 + (A-C)^2}};$$

il en résulte

$$M - N = \pm\sqrt{B^2 + (A-C)^2}.$$

On calculera donc les deux coefficients M et N à l'aide des formules

$$(7)\quad \begin{cases} M + N = A + C \\ M - N = \pm\sqrt{B^2 + (A-C)^2}. \end{cases}$$

Nous avons choisi la valeur de 2α positive et inférieure à π; $\sin 2\alpha$ ayant une valeur positive, il faudra mettre devant le radical le signe de B. De cette manière l'équation de la courbe est ramenée à la forme simple

$$(8)\quad Mx'^2 + Ny'^2 + F_1 = 0.$$

Si l'on retranche les deux équations (7) membre à membre après les avoir élevées au carré, on obtient la relation

$$4MN = 4AC - B^2.$$

L'équation (8) représente une ellipse ou une hyperbole, suivant que les deux coefficients M et N ont le même signe ou des signes contraires.

PARABOLE.

142—Quand $B^2 - 4AC = 0$, les termes du second degré dans l'équation proposée forment un carré parfait; on a, en effet, en remplaçant A par sa valeur $\frac{B^2}{4C}$,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = C\left(y^2 + \frac{B}{C}xy + \frac{B^2}{4C^2}x^2\right) = C\left(y + \frac{B}{2C}x\right)^2,$$

et l'équation peut s'écrire

$$C\left(y+\frac{B}{2C}x\right)^2+Dx+Ey+F=0.$$

Faisons d'abord tourner les axes des coordonnées autour de l'origine d'un angle α (fig. 73), à l'aide des formules de transformation

$$x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha,$$
$$y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha;$$

l'équation proposée devient

$$(10)\ C\left[\left(\cos\alpha-\frac{B}{2C}\sin\alpha\right)y_1+\left(\sin\alpha+\frac{B}{2C}\cos\alpha\right)x_1\right]^2$$
$$+(D\cos\alpha+E\sin\alpha)x_1+(E\cos\alpha-D\sin\alpha)y_1+F=0.$$

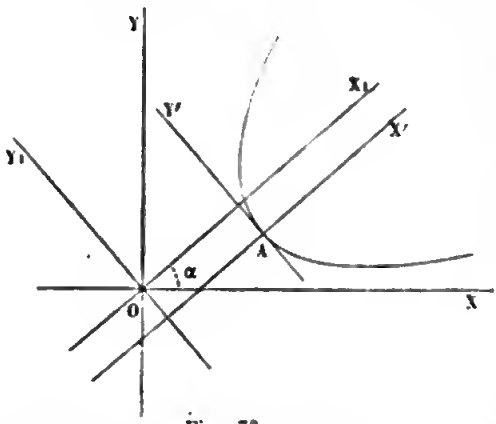


Fig. 73.

On peut disposer de l'angle α de manière à annuler le coefficient de x_1 ou de y_1 dans le polynôme qui est élevé au carré; posons, par exemple,

$$\sin\alpha+\frac{B}{2C}\cos\alpha=0,$$

d'où

$$(11)\ \tang\alpha=-\frac{B}{2C},$$

l'équation (10) se simplifiera et prendra la forme

$$(12)\ Ny_1^2+Px_1+Qy_1+F=0.$$

On a

$$N=C\left(\cos\alpha-\frac{B}{2C}\sin\alpha\right)^2=C\left(\cos\alpha+\tang\alpha\sin\alpha\right)^2=\frac{C}{\cos^2\alpha},$$

et par suite

$$N=\frac{B^2+4C^2}{4C}=A+C.$$

Quant aux coefficients P et Q, on les obtiendra en remplaçant $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ par leurs valeurs, ce qui donne

$$P=\frac{2CD-BE}{\sqrt{4C(A+C)}},\qquad Q=\frac{2CE+BD}{\sqrt{4C(A+C)}}.$$

Si le coefficient P était nul, l'équation (12), ne renfermant plus x_1, ne pourrait représenter que deux droites parallèles à l'axe OX_1. Lorsque ce coefficient est différent de zéro, on trans-

porte les axes parallèlement à eux-mêmes; en posant $x_1 = a + x'$, $y_1 = b + y'$, l'équation (12) devient

$$Ny'^2 + Px' + (2Nb + Q)y' + (Nb^2 + Pa + Qb + F) = 0.$$

On disposera des coordonnées a et b de la nouvelle origine A de manière à annuler le coefficient de y' et le terme constant,

$$2Nb + Q = 0,$$
$$Nb^2 + Pa + Qb + F = 0,$$

ce qui donne pour a et b des valeurs finies et déterminées, et l'équation sera ramenée à la forme simple

$$(13)\quad Ny'^2 + Px' = 0.$$

On a fait d'abord tourner les axes des coordonnées autour de l'origine de manière à rendre l'axe OX_1 parallèle à l'axe de la parabole; on a transporté ensuite les axes parallèlement à eux-mêmes au sommet A de la parabole. De cette manière la parabole est rapportée à son axe et à la tangente au sommet.

EXEMPLES.

I. $2x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 7y + 1 = 0.$

La courbe est une ellipse, puisque la quantité $B^2 - 4AC$ est négative. Pour obtenir les coordonnées du centre on égale à zéro les deux dérivées partielles,

$$4x - 3y + 1 = 0,$$
$$-3x + 6y - 7 = 0.$$

d'où

$$x = 1, \quad y = \frac{5}{3};$$

il en résulte $F_1 = -\frac{13}{3}$.

En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au centre C (fig. 72), l'équation devient

$$2x_1^2 - 3x_1y_1 + 3y_1^2 - \frac{13}{3} = 0.$$

Faisons maintenant tourner les axes d'un angle α donné par la formule

$$tang\, 2\alpha = \frac{B}{A - C} = 3.$$

L'équation résolue par les tables donne

$$2\alpha = 71^\circ 33' 54'',$$

d'où

$$\alpha = 35^\circ 46' 57''.$$

On peut aussi obtenir l'angle α par une construction graphique ; on porte sur les axes des x et des y, à partir de l'origine C, deux longueurs respectivement égales à 1 et 3; la diagonale du rectangle construit sur les deux longueurs fait avec l'axe des x un angle qui a pour tangente 3; l'axe CX′ est donc la bissectrice de cet angle. On obtient ensuite M et N par les formules

$$M + N = 5,$$
$$M - N = -\sqrt{10},$$

puisque B est négatif. Il en résulte

$$M = \frac{5 - \sqrt{10}}{2}, \qquad N = \frac{5 + \sqrt{10}}{2},$$

et l'équation de la courbe devient

$$\left(5 - \sqrt{10}\right) x'^2 + \left(5 + \sqrt{10}\right) y'^2 = \frac{26}{3};$$

la courbe intercepte sur les axes des longueurs

$$CA = \sqrt{\frac{26}{3(5 - \sqrt{10})}}, \qquad CB = \sqrt{\frac{26}{3(5 + \sqrt{10})}}.$$

II. $2x^2 - 5xy + 5y - 1 = 0.$

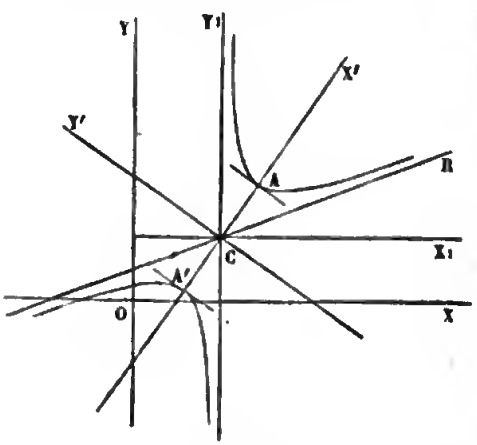


Fig. 74.

La courbe est une hyperbole. Les coordonnées du centre données par les équations

$$4x - 5y = 0,$$
$$-5x + 5 = 0,$$

sont

$$x = 1, \; y = \frac{4}{5}, \text{ d'où } F_1 = 1.$$

En transportant l'origine au centre, l'équation devient

$$2x_1^2 - 5x_1 y_1 + 1 = 0.$$

L'angle α est donné par la formule

$$tang\, 2\alpha = -\frac{5}{2},$$

et l'on a

$$M + N = 2,$$
$$M - N = -\sqrt{29},$$
$$\text{d'où } M = \frac{2-\sqrt{29}}{2}, \quad N = \frac{2+\sqrt{29}}{2}.$$

L'équation de la courbe rapportée à ses axes est

$$(2-\sqrt{29})x'^2 + (2+\sqrt{29})y'^2 + 2 = 0.$$

L'équation primitive ne contenant pas de terme en y^2, l'une des asymptotes est parallèle à l'axe OY (fig. 74).

III. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 36x + 100 = 0$.

La courbe est une parabole (fig. 73). Les termes du second degré forment un carré parfait, et l'équation peut s'écrire

$$9\left(y - \frac{2}{3}x\right)^2 - 36x + 100 = 0.$$

Faisons tourner les axes des coordonnées de l'angle α donné par la formule

$$tang\,\alpha = -\frac{B}{2C} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3},$$

d'où

$$\alpha = 34^\circ 41' 25'',$$

on aura

$$N = 13, \quad cos\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, sin\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}},$$
$$P = -\frac{108}{\sqrt{13}}, \quad Q = \frac{72}{\sqrt{13}}.$$

L'équation de la courbe rapportée aux axes OX_1 et OY_1 est donc

$$13y_1^2 - \frac{108}{\sqrt{13}}x_1 + \frac{72}{\sqrt{13}}y_1 + 100 = 0.$$

On obtient les coordonnées du sommet en joignant à cette équation la suivante

$$26y_1 + \frac{72}{\sqrt{13}} = 0.$$

On en déduit

$$y_1 = -\frac{36}{13\sqrt{13}}, \quad x_1 = \frac{3901}{27.\,13\sqrt{13}}.$$

En transportant les axes en ce point, l'équation devient

$$13y'^2 - \frac{108}{\sqrt{13}}x' = 0.$$

CHAPITRE IV

De l'Ellipse.

143—Proposons-nous de construire la courbe représentée par l'équation

$$Mx^2 + Ny^2 + F_1 = 0,$$

dans laquelle les deux coefficients M et N ont le même signe, par exemple le signe +.

Si la constante F_1 a une valeur positive, l'équation, ne pouvant être satisfaite par des valeurs réelles de x et y, ne représente aucun lieu géométrique.

Si F_1 est égal à zéro, l'équation, n'étant satisfaite que par $x=0$, $y=0$, représente un seul point, l'origine O.

Examinons maintenant le cas où F_1 a une valeur négative ; et posons $F_1 = -H$; l'équation devient

$$Mx^2 + Ny^2 = H.$$

Résolue par rapport à y, elle donne

$$y = \sqrt{\frac{H - Mx^2}{N}}.$$

Pour que l'ordonnée soit réelle, il est nécessaire et il suffit que la valeur numérique de l'abscisse soit plus petite que $\sqrt{\frac{H}{M}}$; portons sur l'axe X'X, à partir de l'origine, deux longueurs OA, OA' égales à $\sqrt{\frac{H}{M}}$ et par les points A, A' menons des parallèles à l'axe

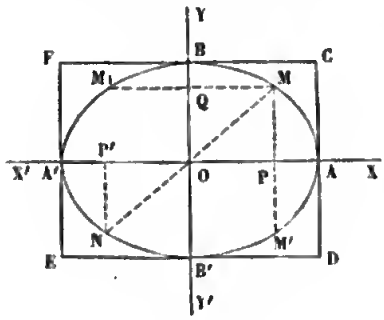


Fig. 75.

Y'Y, la courbe est située tout entière entre ces deux parallèles (fig. 75). A chaque abscisse OP, comprise entre ces limites, correspondent deux ordonnées PM, PM' égales et de signes contraires; quand $x=0$, l'ordonnée acquiert sa plus grande valeur numérique $\sqrt{\frac{H}{N}}$; portons sur Y'Y, à partir de l'origine, deux longueurs OB, OB' égales à $\sqrt{\frac{H}{N}}$, et par les points B, B' menons deux parallèles à l'axe X'X; la courbe est située tout entière entre ces deux nouvelles parallèles, et par conséquent elle est renfermée dans le rectangle CDEF formé par les deux couples de parallèles.

Si, pour abréger, on représente par a et b les deux quantités $\sqrt{\frac{H}{M}}$, $\sqrt{\frac{H}{N}}$, l'équation prend la forme

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

d'où

$$(2)\quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Quand x croît de 0 à a, la valeur numérique de y décroît de b à 0, ce qui donne un arc de courbe BMA, et, à cause du double signe, l'arc égal B'M'A. Quand x varie de 0 à $-a$, la valeur numérique de y décroît encore de b à 0, ce qui donne deux autres arcs BM_1A', B'NA' égaux aux premiers. Ces quatre arcs égaux forment l'ellipse.

La droite A'A est un *axe* de l'ellipse; car à chaque abscisse OP correspondent deux ordonnées PM,PM' égales et de signes contraires. La droite B'B est aussi un *axe* de l'ellipse; car si on résolvait l'équation par rapport à x, on verrait de même qu'à chaque ordonnée OQ correspondent deux abscisses QM, QM_1 égales et de signes contraires.

Les points A, A', B, B', où les axes rencontrent l'ellipse, sont les *sommets* de l'ellipse.

Les longueurs A'A, B'B des deux axes sont respectivement égales à $2a$ et à $2b$.

Digitized by Google

L'ellipse devient un cercle quand les axes sont égaux.

Il est aisé de voir que l'origine O est centre de l'ellipse ; en effet, soient x, y les coordonnées d'un point quelconque M de l'ellipse, il est évident que l'équation (1) est aussi satisfaite par les valeurs $-x$, $-y$; il existe par conséquent un second point N de l'ellipse qui a ses coordonnées $-OP'$, $-P'N$ respectivement égales aux coordonnées OP, PM du point M, mais de sens contraire; les triangles OPM, OP'N sont égaux ; donc OM=ON, et la ligne MON est droite à cause des angles égaux POM, P'ON. Ainsi les points M et N de l'ellipse sont deux à deux symétriques par rapport au point O ; donc le point O est centre de l'ellipse.

144—Pour étudier comment varie la distance du centre aux différents points de l'ellipse, ou le rayon de l'ellipse, cherchons l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires, en prenant le centre O pour pôle et l'axe OA de la courbe pour axe polaire. Si dans l'équation (1) on remplace x et y par $\rho \cos \omega$, et $\rho \sin \omega$ on a

$$(3) \quad \frac{\rho^2 \cos^2 \omega}{a^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 \omega}{b^2} = 1.$$

Supposons $a > b$, et écrivons l'équation sous la forme

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin^2 \omega.$$

Si l'on fait varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$, la quantité $\frac{1}{\rho^2}$ croît, et par conséquent ρ décroît constamment de a à b. Le maximum de ρ est a, le minimum b.

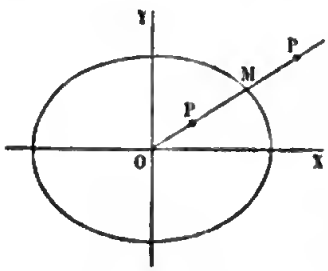


Fig. 76.

145—Désignons par x et y les coordonnées d'un point quelconque du plan et considérons le polynôme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Pour un point M situé sur l'ellipse (fig. 76), le polynôme est égal à zéro.

Imaginons qu'un point mobile P parte du point M et s'éloigne sur le prolongement du rayon OM; les deux coordonnées x et y augmentant en valeur absolue, le polynôme va en croissant indéfiniment; il prend donc des valeurs positives de plus en plus grandes. Au contraire, si le point mobile se rapproche du centre, le polynôme diminue et prend des valeurs négatives. Ainsi le polynôme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ reste négatif pour tous les points situés à l'intérieur de l'ellipse, sur l'ellipse il est nul, et il devient positif pour tous les points situés en dehors de l'ellipse.

146—*Les carrés des ordonnées perpendiculaires à l'un des axes de l'ellipse sont entre eux comme les produits des segments correspondants formés sur cet axe.*

En effet, si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point quelconque M de l'ellipse (fig. 75), on a, en vertu de l'équation (2),

$$\frac{y^2}{a^2-x^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

ou

$$\frac{y^2}{(a-x)(a+x)}=\frac{b^2}{a^2}.$$

Mais les deux segments AP, A'P de l'axe AA' sont égaux respectivement à $a-x$ et à $a+x$; donc on a

$$\frac{\overline{MP}^2}{AP\times A'P}=\frac{b^2}{a^2}.$$

Ainsi le carré de l'ordonnée est au produit des segments formés sur l'axe dans un rapport constant.

147—*Les ordonnées perpendiculaires au grand axe de l'ellipse sont aux ordonnées correspondantes du cercle décrit sur cet axe comme diamètre dans le rapport constant du petit axe au grand axe.*

Soit AA′ le grand axe de l'ellipse (fig. 77); sur ce grand axe comme diamètre décrivons un cercle; à l'ordonnée MP de l'ellipse correspond l'ordonnée M_1P du cercle. L'équation (2) s'écrit

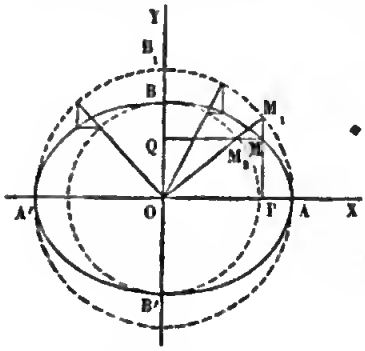


Fig. 77.

$$\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{a};$$

mais $\sqrt{a^2-x^2}$ représente l'ordonnée M_1P du cercle; on a donc

$$\frac{MP}{M_1P}=\frac{b}{a}.$$

Le petit axe jouit de la même propriété; l'ordonnée MQ, perpendiculaire au petit axe, est à l'ordonnée correspondante M_2Q du cercle décrit sur cet axe comme diamètre dans le rapport constant du grand axe au petit axe.

148—*L'ellipse est la projection orthogonale d'un cercle.* Imaginons que l'on fasse tourner le cercle AB_1A' autour de AA′ comme charnière d'un angle φ, tel que l'on ait $\cos\varphi=\frac{b}{a}$, l'ordonnée PM_1 du cercle tournera autour du point P, tout en restant perpendiculaire à l'axe AA′; dans cette position, elle se projettera sur la droite PM; pour avoir la longueur de la projection, il suffit de multiplier la longueur PM_1 par $\cos\varphi$ ou par $\frac{b}{a}$, ce qui donne l'ordonnée PM de l'ellipse. Ainsi le point M_1 du cercle a pour projection le point M de l'ellipse; chacun des points du cercle se projetant ainsi au point correspondant de l'ellipse, il s'ensuit que l'ellipse est la projection du cercle.

On peut aussi considérer le cercle comme la projection orthogonale d'une ellipse. Imaginons que l'on fasse tourner l'ellipse autour de l'axe BB′ d'un angle φ ayant pour cosinus $\frac{b}{a}$; l'ordonnée QM de l'ellipse aura pour projection l'ordonnée QM_2 du cercle décrit sur BB′ comme diamètre, et le petit cercle sera la projection de l'ellipse.

149—*Construction de l'ellipse par points.*

On déduit de ce qui précède un moyen très-simple de construire l'ellipse par points. Sur chacun des deux axes de l'ellipse comme diamètre on décrit un cercle (fig. 77); du centre on trace un rayon quelconque qui coupe les deux cercles en M_1 et M_2; par le point M_1 on mène une parallèle au petit axe, par le point M_2 une parallèle au grand ; le point d'intersection M de ces deux droites appartient à l'ellipse. Après avoir déterminé de la sorte un nombre suffisant de points, on fait passer un trait continu par tous ces points, et l'ellipse est ainsi construite.

150—*Construire les points d'intersection d'une ellipse et d'une droite.*

Il est utile de savoir déterminer les points où une droite donnée MM′ coupe une ellipse définie par ses deux axes AA′, BB′ (fig. 78), sans que l'ellipse soit tracée. Comme nous l'avons dit, l'ellipse peut être considérée comme la projection orthogonale du cercle AB_1A' décrit sur le grand axe AA′ comme diamètre, et que l'on fait tourner autour de AA′ d'un angle φ ayant pour cosinus $\frac{b}{a}$.

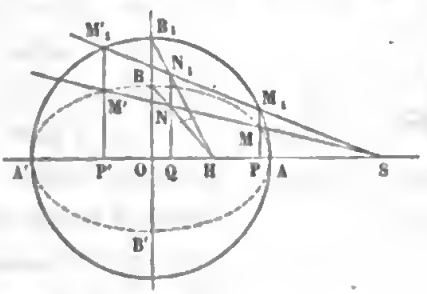


Fig. 78.

Cherchons dans le plan du cercle la droite $M_1M'_1$ qui a pour projection MM′ dans le plan de l'ellipse; soit N un point quelconque de la droite MM′, le point correspondant N_1 est placé sur l'ordonnée NQ à une distance telle que l'on ait

$$\frac{NQ}{N_1Q} = \cos\varphi = \frac{b}{a};$$

pour le déterminer on mènera la droite BN jusqu'à sa rencontre en H avec l'axe AA′; la droite B_1H, se projetant suivant BH, coupe l'ordonnée QN au point N_1. On obtiendrait de même un autre point quelconque de la droite $M_1M'_1$; mais il est plus

simple de se servir du point S où la droite MM′ rencontre l'axe; la droite SN_1 a pour projection la droite donnée sur le plan de l'ellipse. Cette droite SN_1 coupe le cercle en deux points M_1, M'_1; les ordonnées M_1P, M'_1P' détermineront sur la droite donnée les deux points M,M′ où cette droite rencontre l'ellipse.

151—*Équation de la tangente.*

Nous avons trouvé (n° 88) l'équation de la tangente à une courbe quelconque, l'équation de l'ellipse étant ramenée à la forme simple

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

la tangente a pour équation

$$Y-y=-\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}}(X-x),$$

ou

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2};$$

le point de contact étant sur l'ellipse, on a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

et par suite l'équation de la tangente devient

$$(4)\quad \frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1.$$

Le coefficient angulaire de la tangente a pour valeur $-\frac{b^2x}{a^2y}$. On voit qu'en A et A′ la tangente est perpendiculaire sur l'axe A′A, qu'en B et B′ elle lui est parallèle, et que, quand le point de contact se meut sur l'ellipse de A en B, la tangente fait avec A′A un angle obtus qui croît de $\frac{\pi}{2}$ à π.

La normale étant perpendiculaire à la tangente a pour équation

$$Y-y=\frac{a^2y}{b^2x}(X-x).$$

152—*Construction de la tangente en un point de l'ellipse.* Si dans l'équation de la tangente on fait $Y=0$, on obtient l'abscisse $X=\frac{a^2}{x}$ du point T où la tangente rencontre le prolongement du grand axe (fig. 79). Comme cette valeur de OT est indépendante du petit axe $2b$ et de l'ordonnée y du point de contact, il en résulte que, si sur l'axe A'A on construit plusieurs ellipses, les tangentes aux points qui ont même abscisse passent par un même point T situé sur le prolongement de l'axe A'A. Or, parmi ces ellipses, se trouve le cercle AB_1A'; pour construire la tangente à l'ellipse au point M, on mènera une tangente au cercle au point M_1, situé sur la même ordonnée, on joindra le point M au point T, où la tangente au cercle rencontre le prolongement de l'axe A'A; la droite MT ainsi obtenue est la tangente à l'ellipse.

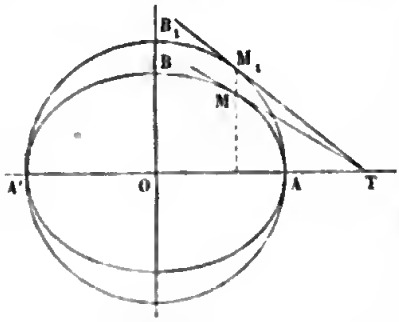


Fig. 79.

Cette construction revient à considérer la tangente à l'ellipse au point M comme la projection de la tangente au cercle au point correspondant M_1. En effet, quand on fait tourner le plan du cercle autour de l'axe AA' de l'angle φ, le point T où la tangente M_1T rencontre l'axe, ne bouge pas, le point M_1 se projetant en M, la droite TM_1 aura pour projection TM; c'est la tangente à l'ellipse.

153—*Mener une tangente par un point extérieur* P. Désignons par x_1 et y_1 les coordonnées du point P (fig. 80). Soit PM la tangente demandée, appelons x et y les coordonnées du point de contact M; le point M étant sur l'ellipse, on a l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

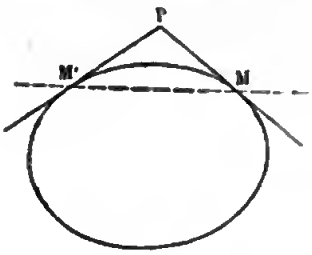


Fig. 80.

La tangente au point M a pour équation

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1;$$

cette tangente devant passer au point P, son équation doit être vérifiée par les coordonnées du point P, ce qui donne l'équation de condition

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

Ainsi les deux coordonnées x et y du point de contact M sont déterminées par les deux équations simultanées

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$(5)\quad \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

Pour résoudre ces deux équations, on substituera dans la première la valeur

$$\frac{y}{b}=\frac{1-\frac{xx_1}{a^2}}{\frac{y_1}{b}}$$

tirée de la seconde, ce qui conduit à l'équation du second degré

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)-2\frac{xx_1}{a^2}+\left(1-\frac{y_1^2}{b^2}\right)=0,$$

dont les racines sont les abscisses des points de contact M et M′ des deux tangentes menées du point P. Cette équation, dans laquelle on peut regarder $\frac{x}{a}$ comme l'inconnue, aura ses racines réelles si la condition

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1>0$$

est satisfaite, c'est-à-dire si le point P est en dehors de l'ellipse.

La résolution des deux équations simultanées (1) et (5) revient à chercher les points d'intersection des deux lignes représentées par ces deux équations. L'équation (1) représente l'ellipse proposée, l'équation (5) la droite des contacts MM′.

154—Il est facile de construire géométriquement les tan-

gentes menées du point P, en considérant l'ellipse comme la projection du cercle AB_1A (fig. 81). Cherchons dans le plan du cercle le point P_1 qui a pour projection le point P dans le plan de l'ellipse. Traçons dans le plan de l'ellipse la droite PB que nous prolongerons jusqu'à sa rencontre avec l'axe en H; la droite HB_1, ayant pour projection HB, passera par le point P_1 et déterminera ce point. Du point P_1 menons au cercle des tangentes P_1M_1, P_1M_1' que nous prolongerons jusqu'à leur rencontre avec l'axe en T et T'; les droites PT, PT', projections des tangentes au cercle, seront tangentes à l'ellipse, et les points de contact M et M' seront situés sur les ordonnées des points M_1, M_1'.

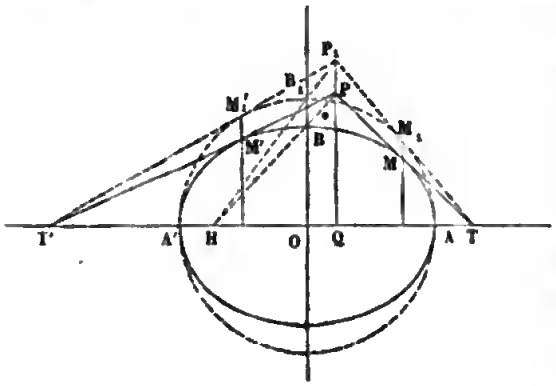


Fig. 81.

Pour que l'on puisse effectuer ces constructions, il n'est pas nécessaire que l'ellipse soit tracée.

155—*Mener une tangente parallèle à une droite donnée.* Soit

$$y = mx$$

l'équation de la droite donnée OL, que l'on peut supposer menée par le centre (fig. 82). Appellons x et y les coordonnées du point de contact M; ce point étant sur l'ellipse, on a l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

le coefficient angulaire de la tangente devant être égal à m, on a la seconde équation

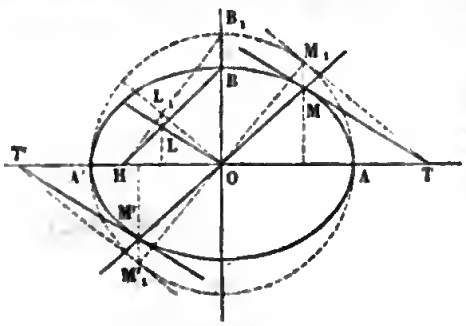


Fig. 82.

$$-\frac{b^2x}{a^2y}=m.$$

Ces deux équations simultanées déterminent les deux inconnues x et y; la première représente l'ellipse proposée; la seconde une droite MM′ passant par le centre; les points où cette droite rencontre l'ellipse sont les points de contact.

156—Il est facile de construire ces tangentes géométriquement. Cherchez d'abord dans le plan du cercle le diamètre OL_1 qui a pour projection OL sur le plan de l'ellipse; il suffit de joindre le point B à un point quelconque L de la droite OL et de prolonger la droite BL jusqu'à sa rencontre avec l'axe en H; puis de joindre B_1H et de prendre le point d'intersection L_1 de cette droite avec l'ordonnée du point L; le point L étant la projection du point L_1, la droite OL est la projection de OL_1. Menez au cercle des tangentes M_1T, $M_1'T'$, parallèles à OL_1 (il suffit pour cela de mener un diamètre M_1M_1' perpendiculaire à OL_1); par les points T et T′ où ces tangentes rencontrent l'axe, menez des parallèles TM, T′M′ à la droite OL, vous aurez les tangentes demandées, car les projections OL, TM des droites parallèles OL_1, TM_1 sont elles-mêmes parallèles; vous obtiendrez les points de contact M et M′ par les ordonnées des points M_1 et M_1'.

157—On peut obtenir l'équation de la tangente à l'ellipse sous une autre forme qu'il est bon de connaître. Cherchons les points d'intersection de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

et de la droite

$$y=mx+k.$$

L'élimination de y conduit à l'équation du second degré

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)x^2+\frac{2mk}{b^2}x+\left(\frac{k^2}{b^2}-1\right)=0,$$

dont les racines sont les abscisses des points d'intersection. Quand cette équation a ses racines réelles et inégales, la droite

rencontre l'ellipse en deux points ; c'est une sécante. Quand les racines deviennent égales entre elles, ce qui a lieu lorsque la condition

$$k^2 = a^2m^2 + b^2$$

est remplie, les deux points d'intersection se confondent, et la sécante devient tangente. Si l'on remplace la constante k par sa valeur, l'équation de la tangente se présente sous la forme

$$(6) \quad y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Cette équation, dans laquelle le paramètre m est arbitraire, représente toutes les tangentes à l'ellipse. Si l'on donne le coefficient angulaire m ou la direction de la tangente, l'équation est entièrement déterminée, et, à cause du double signe, on a deux tangentes parallèles et à égale distance du centre.

158—Cette forme donnée à l'équation de la tangente est utile dans un grand nombre de questions. Pour en montrer un exemple, proposons-nous le problème suivant : Trouver le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à l'ellipse. Supposons que l'on veuille mener par un point extérieur (fig. 83), ayant pour coordonnées x et y, des tangentes à l'ellipse ; si l'on représente la tangente par l'équation

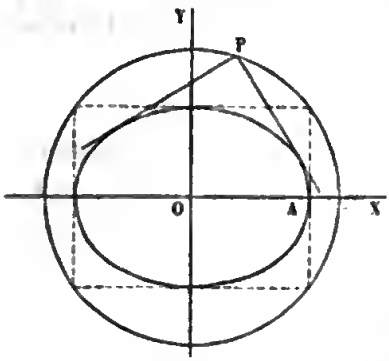


Fig. 83.

$$Y = mX \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2},$$

la tangente devant passer par le point P, on aura l'équation de condition

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2},$$

dans laquelle le coefficient angulaire m est l'inconnue. Cette équation, mise sous forme entière,

$$m^2(a^2 - x^2) + 2xym + (b^2 - y^2) = 0$$

est du second degré ; ses deux racines donnent les directions des deux tangentes menées du point P à l'ellipse, et, par consé-

quent, déterminent ces tangentes. Les deux tangentes menées par le point P seront rectangulaires, si le produit des deux valeurs de m est égal à -1, ce qui exige que les coordonnées du point P vérifient la relation

$$\frac{b^2-y^2}{a^2-x^2}=-1,$$

ou

$$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

Ainsi le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à l'ellipse est le cercle circonscrit au rectangle construit sur les axes.

DIAMÈTRES.

159—Nous avons trouvé (nº 129) l'équation générale des diamètres dans les courbes du second degré. En représentant par $f(x, y)$ l'équation de la courbe, et par m le coefficient angulaire des cordes parallèles MM′ (fig. 84), nous avons vu que l'équation du diamètre DD′ se met sous la forme

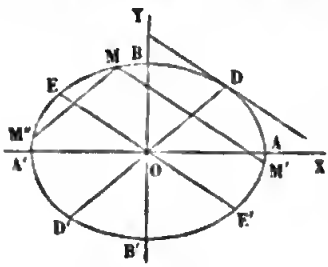


Fig. 84.

$$f'_x+mf'_y=0.$$

L'ellipse étant rapportée à ses axes, l'équation du diamètre se réduit à

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2my}{b^2}=0,$$

ou

$$y=-\frac{b^2}{a^2m}x.$$

Si l'on désigne par m' le coefficient angulaire du diamètre DD′, on a, entre la direction des cordes et celle du diamètre, la relation

$$(7)\quad mm'=-\frac{b^2}{a^2}.$$

Nous avons vu aussi que si l'on mène des cordes MM″ parallèles au diamètre DD′, le diamètre EE′ qui divise ces cordes en deux parties égales a pour coefficient angulaire m; les deux diamètres DD′, EE′ forment un système de diamètres

conjugués, et leurs coefficients angulaires m' et m sont liés par la relation (7).

Cette relation fait voir que les deux coefficients angulaires m et m' sont de signes contraires, et par conséquent que les deux demi-diamètres conjugués OD et OE sont situés de part et d'autre du petit axe; si le premier part de la position OA et tourne de OA vers OB, le second part de la position OB et tourne de OB vers OA'.

160—La tangente en un point quelconque D de l'ellipse est parallèle au diamètre EE' conjugué du diamètre DD' qui passe au point de contact. En effet, si l'on appelle x et y les coordonnées du point D, le diamètre OD a pour coefficient angulaire $m = \frac{y}{x}$; le coefficient angulaire de la tangente au point D est $m' = -\frac{b^2x}{a^2y}$; on voit que ces deux coefficients vérifient la relation $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$.

On se rend bien compte de cette propriété en imaginant que la sécante MM' se meut parallèlement au diamètre EE', et s'éloigne du centre; les deux points d'intersection M et M' se rapprochent de plus en plus du milieu de la corde, et finissent par se confondre en D; alors la sécante devient tangente au point D.

161—Les propriétés des diamètres conjugués se montrent immédiatement, quand on considère l'ellipse comme la projection d'un cercle. Deux diamètres rectangulaires OD_1, OE_1 (fig. 85), dans le plan du cercle, forment un système de diamètres conjugués; car chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre; les cordes parallèles se projettent sur le plan de l'ellipse suivant des cordes parallèles;

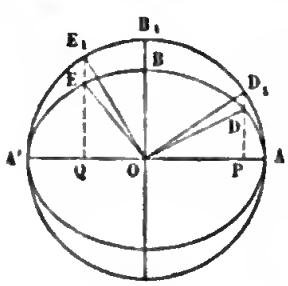


Fig. 85.

le milieu d'une corde a pour projection le milieu de la projection de la corde; chacun des diamètres OD et OE, projections des premiers, divise donc en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre; ce sont deux diamètres conjugués de l'ellipse.

On en déduit facilement la relation qui existe entre les coefficients angulaires m et m' de deux diamètres conjugués. Si l'on appelle m_1 et m_1' les coefficients angulaires des deux diamètres conjugués OD_1, OE_1 du cercle, on a $m=\frac{b}{a}m_1$, $m'=\frac{b}{a}m'_1$; d'où $mm'=\frac{b^2}{a^2}m_1m_1'$; puisque les diamètres conjugués du cercle sont rectangulaires, on a $m_1m_1'=-1$; il en résulte $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$.

Quand on donne un diamètre OD, on peut trouver le conjugué OE, sans que l'ellipse soit tracée. On construira le diamètre OD_1 qui a pour projection OD; on mènera le diamètre OE_1 perpendiculaire à OD_1, et on projettera OE_1; la projection OE sera le diamètre demandé.

162—*Ellipse rapportée à deux diamètres conjugués.* Nous avons vu (n° 138) que, lorsqu'on prend pour axes des coordonnées deux diamètres conjugués DD', EE' d'une ellipse, l'équation de la courbe se simplifie et se met sous la forme

$$Mx'^2+Ny'^2=H.$$

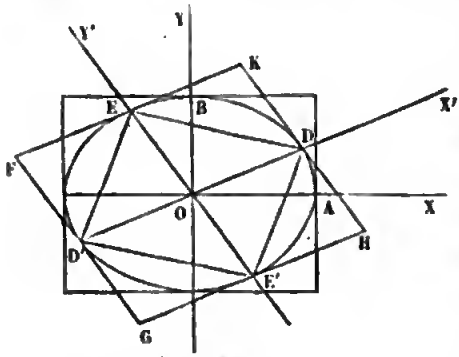


Fig. 86.

Désignons par $2a'$ et $2b'$ les longueurs des diamètres conjugués; si, dans l'équation précédente, on fait successivement $y=0$ et $x=0$, on a

$$a'^2=\frac{H}{M},\quad b'^2=\frac{H}{N},$$

ce qui permet d'écrire l'équation de la courbe de la manière suivante :

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1.$$

Ainsi, quand on rapporte l'ellipse à deux diamètres conjugués, la forme de l'équation est la même que lorsque la courbe est rapportée à ses axes. Seulement les coordonnées sont obliques au lieu d'être rectangulaires.

Les calculs qui ont été effectués pour démontrer les propriétés de l'ellipse, au moyen de l'équation rapportée aux axes, et dans lesquels on n'a pas supposé les coordonnées orthogonales, pourront être répétés avec l'équation de la courbe rapportée à un système de diamètres conjugués. Ainsi l'ellipse étant rapportée au système des diamètres conjugués OD et OE, la tangente aura pour équation

$$\frac{x'X'}{a'^2}+\frac{y'Y'}{b'^2}=1.$$

Mais l'équation de la normale ne conserverait pas la même forme.

163—Si l'on appelle α et β les angles que font les deux demi-diamètres OD, OE avec le grand axe OA, a' et b' leurs longueurs, on a, d'après l'équation (3) du n° 144,

$$(9)\quad \frac{a'^2\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{a'^2\sin\alpha}{b^2}=1,$$

$$(10)\quad \frac{b'^2\cos^2\beta}{a^2}+\frac{b'^2\sin^2\beta}{b^2}=1.$$

Les deux diamètres étant conjugués, on a, en outre, la relation

$$\tang\alpha\,\tang\beta=-\frac{b^2}{a^2},$$

ou

$$(11)\quad \frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2}=0.$$

Des deux angles α et β, l'un étant aigu, l'autre obtus, nous supposerons α aigu, β obtus.

On a ainsi trois relations entre les quatre quantités variables

α, β, a', b', dont une seule est arbitraire. En combinant ces relations de diverses manières, on obtient différents théorèmes.

164—En multipliant par $a'\,b'$ les deux membres de l'équation (11), on peut l'écrire sous la forme suivante

$$\frac{\dfrac{a'\cos\alpha}{a}}{\dfrac{b'\sin\beta}{b}}=\frac{\dfrac{a'\sin\alpha}{b}}{\dfrac{-b'\cos\beta}{a}};$$

chacune de ces fractions est égale à une fraction ayant pour numérateur la racine carrée de la somme des carrés des numérateurs, et pour dénominateur la racine carrée de la somme des carrés des dénominateurs; en vertu des équations (9) et (10) ces deux sommes étant égales à l'unité, on a

$$\frac{\dfrac{a'\cos\alpha}{a}}{\dfrac{b'\sin\beta}{b}}=\frac{\dfrac{a'\sin\alpha}{b}}{\dfrac{-b'\cos\beta}{a}}=1;$$

d'où

$$\frac{a'\cos\alpha}{a}=\frac{b'\sin\beta}{b},\qquad \frac{a'\sin\alpha}{b}=-\frac{b'\cos\beta}{a}.$$

Si dans l'équation (9) on remplace $\dfrac{a'\sin\alpha}{b}$ par la quantité égale $-\dfrac{b'\cos\beta}{a}$, on a

$$(12)\quad a'^2\cos^2\alpha+b'^2\cos^2\beta=a^2;$$

si dans la même équation, on remplace $\dfrac{a'\cos\alpha}{a}$ par la quantité égale $\dfrac{b'\sin\beta}{b}$, on a aussi

$$(13)\quad a'^2\sin^2\alpha+b'^2\sin^2\beta=b^2.$$

Les deux équations (12) et (13) signifient que *la somme des carrés des projections de deux diamètres conjugués quelconques sur chacun des axes est constante et égale au carré de cet axe.*

En ajoutant les deux équations (12) et (13) membre à membre, on obtient l'équation

$$(14)\quad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2;$$

ainsi *la somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est constante et égale à la somme des carrés des axes.*

165—En décomposant chacun des termes de l'équation (9) en deux facteurs, on peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{a' \cos\alpha}{a} \cdot \frac{a' \cos\alpha}{a} + \frac{a' \sin\alpha}{b} \cdot \frac{a' \sin\alpha}{b} = 1;$$

si l'on remplace les seconds facteurs $\frac{a' \cos\alpha}{a}$, $\frac{a' \sin\alpha}{b}$ par les quantités égales $\frac{b' \sin\beta}{b}$, $-\frac{b' \cos\beta}{b}$, il vient

$$\frac{a'b'(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta)}{ab} = 1,$$

ou

$$(14)\quad a'b' \sin(\beta - \alpha) = ab.$$

Le produit $a'b' \sin(\beta - \alpha)$ est la mesure de l'aire du parallélogramme ODKE (fig. 87); en multipliant par 4, on obtient l'aire du parallélogramme circonscrit FGHK. Ainsi *l'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques est constante et égale au rectangle construit sur les axes.*

Le parallélogramme inscrit DED'E', qu'on obtient en joignant les extrémités des diamètres conjugués, est la moitié du précédent, et a aussi une aire constante.

166—On peut démontrer facilement ces théorèmes en considérant l'ellipse comme la projection d'un cercle.

Deux diamètres conjugués OD et OE de l'ellipse sont les projections de deux diamètres rectangulaires OD_1 et OE_1 du cercle (fig. 85). Les angles D_1OP, E_1OQ étant complémentaires, les triangles rectangles D_1OP, E_1OQ sont égaux, et l'on a $OQ = D_1P$; mais $\overline{OP}^2 + \overline{D_1P}^2 = \overline{OD_1}^2 = a^2$; il en résulte

$$\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = a^2.$$

Les longueurs OP et OQ étant les projections des deux demi-

diamètres conjugués OD et OE sur le grand axe de l'ellipse, on voit que la somme des carrés de ces deux projections est constante, ce qu'on écrira de la manière suivante

$$a'^2 \cos\alpha + b'^2 \cos^2\beta = a^2.$$

Il en est de même pour l'autre axe. Les projections des deux demi-diamètres conjugués sur le petit axe sont égales aux coordonnées DP et EQ ; mais $DP = \frac{b}{a} D_1P$, $EQ = \frac{b}{a} E_1Q$, et par suite $\overline{DP}^2 + \overline{EQ}^2 = \frac{b^2}{a^2}(\overline{D_1P}^2 + \overline{E_1Q}^2)$; les longueurs E_1Q et OP étant égales, on a $\overline{D_1P}^2 + \overline{E_1Q}^2 = \overline{D_1P}^2 + \overline{OP}^2 = a^2$, et par suite

$$\overline{DP}^2 + \overline{EQ}^2 = b^2,$$

ou

$$a'^2 \sin^2\alpha + b'^2 \sin^2\beta = b^2,$$

En ajoutant membre à membre les deux relations précédentes, on obtient la relation

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

167—Pour démontrer la propriété relative à l'aire du parallélogramme, nous nous servirons du théorème suivant :

La projection d'une aire plane sur un plan est égale à l'aire projetée multipliée par le cosinus de l'angle des deux plans.

Considérons d'abord un triangle ABC (fig. 87) ayant un côté AB parallèle au plan de projection ; nous pouvons supposer que le plan de projection passe par ce côté AB ; du sommet C abaissons sur ce plan une perpendiculaire CC′ et, dans ce plan, menons C′D perpendiculaire à AB ; la droite CD sera aussi perpendiculaire à AB et l'angle CDC′ mesurera l'angle dièdre φ des deux plans. Cela posé, on a

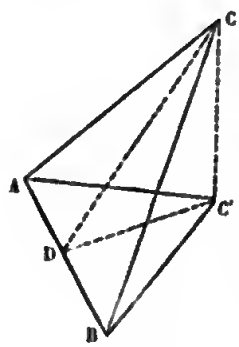


Fig. 87.

$$C'D = CD \cos\varphi,$$

d'où

$$\frac{AB \times C'D}{2} = \frac{AB \times CD}{2} \cos\varphi,$$

et par suite

$$AC'B = ACB \times \cos\varphi.$$

Ainsi l'aire du triangle AC'B est égale à celle du triangle ACB multipliée par $\cos\varphi$.

Supposons maintenant que le triangle ABC (fig. 88) n'ait aucun de ses côtés parallèle au plan de projection ; nous pouvons faire passer ce plan par le sommet A, de telle sorte que les deux autres sommets soient d'un même côté ; le plan du triangle prolongé coupe le plan de projection suivant une droite AI et la droite CB perce ce plan au point I ; les triangles AIC, AIB se projettent suivant AIC', AIB', et l'on a, d'après ce qui a été dit,

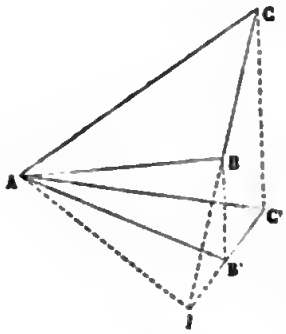


Fig. 88.

$$AIC' = AIC \times \cos\varphi,$$
$$AIB' = AIB \times \cos\varphi;$$

d'où, par la soustraction,

$$AB'C' = ABC \times \cos\varphi.$$

Le théorème, étant démontré pour un triangle, s'étend à un polygone plan quelconque, que l'on peut toujours décomposer en triangles, et même à une aire plane limitée par une courbe fermée quelconque ; car on peut toujours considérer cette aire plane comme la limite de l'aire d'un polygone inscrit, dont on augmente indéfiniment le nombre des côtés de manière que chacun tende vers zéro.

Quand on considère l'ellipse comme la projection d'un cercle, le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est la projection d'un carré circonscrit au cercle ; le carré ayant une aire constante égale à $4a^2$, celle du parallélogramme est aussi constante et égale à $4a^2\cos\varphi$, c'est-à-dire à $4ab$.

AIRE DE L'ELLIPSE.

168—Le même théorème nous donne immédiatement l'aire de l'ellipse. L'ellipse étant la projection d'un cercle, son

aire est égale à celle du cercle πa^2, multipliée par $\cos\varphi$ ou par $\frac{b}{a}$, ce qui donne πab.

DIAMÈTRES CONJUGUÉS ÉGAUX.

169—Nous avons vu (nº 159) que les deux demi-diamètres conjugués OD et OE sont situés de part et d'autre du petit axe OB (fig. 89). On sait que le rayon de l'ellipse est d'autant plus grand qu'il s'écarte davantage du petit axe ; pour que les deux diamètres conjugués deviennent égaux, il faut donc que ces deux diamètres fassent des angles égaux avec le petit axe OB, ce qui exige que les angles α et β soient supplémentaires.

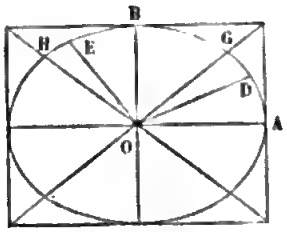


Fig. 89.

On a donc $tang^2\alpha = \frac{b^2}{a^2}$ et par suite $tang\,\alpha = \frac{b}{a}$; ainsi les diamètres conjugués égaux OG et OH coïncident avec les diagonales du rectangle construit sur les axes.

De la relation $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$, on déduit $a'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$, et l'équation de l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués égaux devient

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2};$$

elle a même forme que l'équation du cercle, seulement les coordonnées sont obliques.

Cette équation signifie que la somme des carrés des distances de chacun des points de l'ellipse aux deux diamètres conjugués égaux est constante. En effet, soient θ l'angle des deux diamètres conjugués égaux, MP et MQ les coordonnées du point M, ME et MF les perpendiculaires abaissées du point M sur ces diamètres, on a (fig. 90)

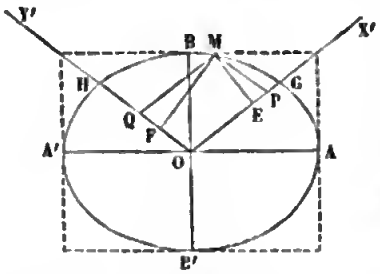


Fig. 90

$$ME = y' \sin\theta, \quad MF = x' \sin\theta;$$

d'où

$$\overline{ME}^2 + \overline{MF}^2 = (x'^2 + y'^2)\sin^2\theta = \frac{(a^2+b^2)\sin^2\theta}{2} = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

CORDES SUPPLÉMENTAIRES.

170—On appelle *cordes supplémentaires* dans l'ellipse deux cordes MC, MC′, qui, partant d'un même point M de l'ellipse, aboutissent aux extrémités d'un diamètre CC′ (fig. 91).

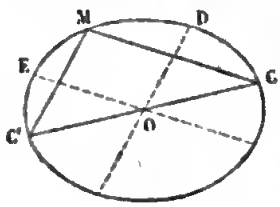


Fig. 91.

Deux cordes supplémentaires sont parallèles à deux diamètres conjugués. Menons, en effet, les diamètres OD et OE parallèles aux cordes supplémentaires MC′, MC. Dans le triangle CMC′, la droite OD parallèle à C′M, divise en parties proportionnelles les deux côtés CC′ et CM; le centre O étant le milieu de CC′, il s'ensuit que le diamètre OD divise en deux parties la corde CM et par suite toutes les cordes parallèles au diamètre OE. De même, le diamètre OE divise en deux parties égales la corde C′M et, par suite, toutes les cordes parallèles à OD. Donc les deux diamètres OD et OE, parallèles aux cordes supplémentaires MC′, MC, sont conjugués.

Réciproquement, si par les extrémités d'un diamètre CC′ on mène des droites parallèles à deux diamètres conjugués OD et OE, ces droites se couperont sur l'ellipse. En effet, soit M le point où la corde CM, parallèle à OE, rencontre l'ellipse; joignons C′M; les cordes supplémentaires MC, MC′ étant parallèles à deux diamètres conjugués, la seconde corde C′M sera parallèle à OD.

171—L'étude de la variation de l'angle de deux diamètres conjugués se trouve ainsi ramenée à l'étude de la variation de l'angle de deux cordes supplémentaires, c'est-à-dire de l'angle inscrit dans une demi-ellipse. Pour simplifier le calcul, on peut supposer les deux cordes supplémentaires menées par les

extrémités du grand axe (fig. 92). L'angle AMA′, que nous appellerons θ, est égal à la différence des deux angles MAX, MA′X; les deux droites AM et A′M ayant pour coefficients angulaires $\frac{y}{x-a}$ et $\frac{y}{x+a}$, on a

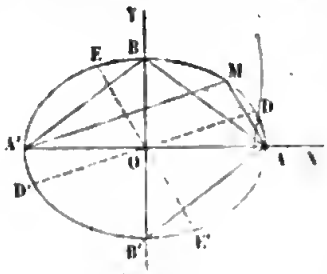


Fig. 92.

$$tang\,\theta = \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a}}{1 + \frac{y^2}{x^2-a^2}} = \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2},$$

et, en remplaçant x^2 par sa valeur tirée de l'équation de l'ellipse,

$$tang\,\theta = -\frac{2ab^2}{(a^2-b^2)y}.$$

Si le point M décrit la moitié supérieure AMA′ de l'ellipse, la tangente étant négative, l'angle θ est obtus; quand le point M est au point A, c'est-à-dire quand $y=0$, l'angle θ est droit; le point M marchant de A vers B, y augmente; la valeur absolue de *tang* θ diminuant, l'angle obtus θ augmente aussi et acquiert sa valeur maximum au point B; alors on a $y=b$ et $tang\,\theta = -\frac{2ab}{a^2-b^2}$; quand le point M dépasse le point B et parcourt le quart d'ellipse BA′, l'angle θ diminue de sa valeur maximum jusqu'à un angle droit.

Il résulte de là que l'angle des demi-diamètres conjugués OD et OE, situés d'un même côté du grand axe, est obtus et varie depuis un angle droit jusqu'à la valeur maximum ABA′; les diamètres conjugués, qui comprennent l'angle maximum, étant respectivement parallèles aux cordes supplémentaires A′B et AB et par suite également inclinés de part et d'autre du petit axe OB, sont égaux.

Nous avons étudié la variation de l'angle obtus DOE de deux diamètres conjugués, l'angle aigu DOE′ varie en sens inverse. On obtient directement cet angle en menant les cordes supplé-

mentaires par les extrémités du petit axe BB′; quand le point M décrit le quart d'ellipse BA, l'angle inscrit diminue depuis un angle droit jusqu'au minimum BAB′, supplémentaire du maximum obtus ABA′.

172—Lorsqu'une ellipse est tracée, on peut déterminer graphiquement le centre et les axes. Pour trouver le centre, on mènera deux cordes parallèles suffisamment écartées l'une de l'autre; on joindra les milieux de ces cordes, ce qui donnera un diamètre dont le milieu sera le centre. Si sur ce diamètre on décrit un demi-cercle, et que l'on joigne aux deux extrémités du diamètre le point où ce demi-cercle coupe la demi-ellipse, on aura deux cordes supplémentaires perpendiculaires entre elles; les diamètres parallèles, formant un système de diamètres conjugués rectangulaires, seront les axes de l'ellipse.

On pourrait obtenir de la même manière les deux systèmes de diamètres conjugués qui font entre eux un angle donné compris entre le minimum et le maximum; il suffirait de décrire sur un diamètre un segment capable de l'angle donné.

173—*Construire une ellipse, étant donnés deux diamètres conjugués.*

Soient DD′, EE′ (fig. 93) les deux diamètres conjugués donnés, dont nous désignerons les longueurs par $2a'$ et $2b'$.

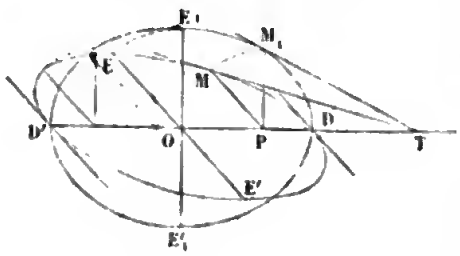


Fig. 93.

L'équation de l'ellipse, rapportée à ces deux diamètres conjugués, est

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Par le centre menons la droite E_1E_1' perpendiculaire à DD′ et prenons $OE_1 = OE$; l'ellipse qui a pour axes DD′, E_1E_1', rapportée à ces axes, est représentée par la même équation. Il en résulte que les ordonnées MP, M_1P, qui correspondent à une même abscisse OP, sont

égales entre elles. Imaginons que, par le procédé indiqué au n° 147, on ait construit différents points de l'ellipse DE_1D', dont on connaît les axes; soit M_1 l'un de ces points, M_1P son ordonnée; si par le point P on mène PM parallèle à OE et égale à PM_1, on aura un point M de l'ellipse demandée. Chaque point de la première ellipse donnera un point correspondant de la seconde. Ceci revient à déformer la première ellipse en faisant tourner chaque ordonnée PM_1 autour de son pied P d'un angle constant.

Le même mode de transformation s'applique à la tangente. La tangente au point M est représentée par l'équation

$$\frac{xX}{a'^2} + \frac{yY}{b'^2} = 1$$

en coordonnées obliques; cette équation représente aussi la tangente au point M_1 en coordonnées rectangulaires. Ces deux tangentes coupent le prolongement du diamètre DD' au même point T, dont on obtient l'abscisse en faisant $Y = 0$.

Au lieu de construire l'ellipse par points, comme nous l'avons expliqué, on pourrait déterminer d'abord les axes de l'ellipse, et construire ensuite cette ellipse au moyen de ses axes. La détermination des axes dépend d'un théorème que nous allons démontrer.

174—*Deux diamètres conjugués quelconques déterminent sur une tangente fixe* PQ *deux portions* DP, DQ, *dont le produit est constant et égal au carré du demi-diamètre* OE *parallèle à la tangente.*

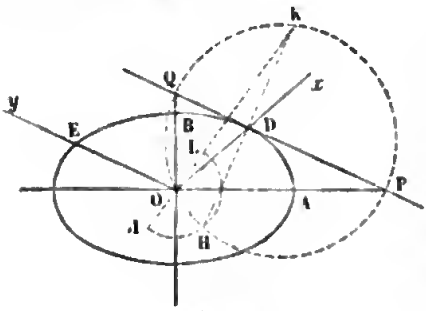


Fig. 94.

Si l'on prend pour axes des coordonnées le diamètre OD, qui passe par le point de contact et le diamètre conjugué OE, et si l'on appelle a' et b' les longueurs de ces demi-diamètres, l'équation de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1.$$

Soient

$$y=mx,\quad y=m'x$$

les équations de deux diamètres conjugués OA, OB; d'après la remarque faite au n° 162 les coefficients angulaires seront liés par la relation

$$mm'=-\frac{b'^2}{a'^2}.$$

Si dans ces équations on fait $x=a'$, on trouve $DP=-ma'$, $DQ=m'a'$, d'où

$$DP\times DQ=-mm'a'^2=b'^2.$$

175—Supposons que les deux diamètres conjugués OA et OB soient les axes de l'ellipse. Le cercle décrit sur PQ comme diamètre passe par le point O, et l'ordonnée DH, perpendiculaire à PQ, est égale à OE. Il en résulte un moyen facile de construire les directions des axes, quand on connaît deux diamètres conjugués OD et OE. Par le point D on mènera une parallèle à OE; cette parallèle sera tangente au point D, on élèvera sur cette droite une perpendiculaire DH égale à OE, et on décrira un cercle ayant son centre sur PQ et passant par les points O et H; les droites OP et OQ qui vont du centre aux deux points P et Q, où le cercle coupe la tangente, donneront les directions des axes.

176—Il reste à déterminer leurs grandeurs.

Des relations

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2$$
$$ab=a'b'\sin\theta,$$

démontrées aux n°s 164 et 165, on déduit

$$(a-b)^2=a'^2+b'^2-2a'b'\sin\theta=a'^2+b'^2-2a'b'\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(a+b)^2=a'^2+b'^2+2a'b'\sin\theta=a'^2+b'^2-2a'b'\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right).$$

On voit par ces formules que la longueur $a-b$ est le troi-

sième côté d'un triangle dont les deux autres côtés sont égaux à a' et à b' et dont l'angle compris est $\theta - \frac{\pi}{2}$. Ce triangle est le triangle ODH; car l'angle ODH est égal à $\theta - \frac{\pi}{2}$, et les deux côtés DO et DH sont égaux à a' et b'; ainsi le troisième côté OH donnera $a - b$. De même $a + b$ est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés sont égaux à a' et à b' et l'angle compris supplémentaire du précédent; ce triangle est le triangle ODK, que l'on obtient en prolongeant la perpendiculaire DH d'une longueur égale à elle-même; le troisième côté OK donnera $a + b$. Si du point O comme centre, avec OH pour rayon, on décrit un cercle, la longueur KI sera égale au grand axe $2a$, la longueur KL au petit axe $2b$.

On peut remarquer que le grand axe OA est la bissectrice de l'angle HOK, le petit axe la bissectrice de l'angle supplémentaire.

DESCRIPTION DE L'ELLIPSE D'UN MOUVEMENT CONTINU.

177—*Lorsque les deux extrémités d'une droite* CD *de longueur constante glissent sur deux droites rectangulaires* OX OY, *un point* M *de cette droite décrit une ellipse* (fig. 95).

Prenons pour axes des coordonnées les deux droites fixes; appelons a et b les deux longueurs constantes MD, MC, x et y les coordonnées variables du point M. Les triangles semblables MPC, DQM donnent

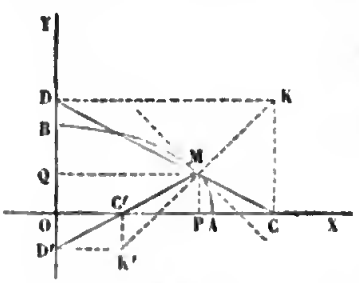


Fig. 95.

$$\frac{MP}{DQ} = \frac{MC}{MD},$$

ou

$$\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a}.$$

Le lieu décrit par le point M est donc une ellipse dont les axes $2a$ et $2b$ sont dirigés suivant les deux droites rectangulaires données.

Il n'est pas nécessaire que le point M soit situé sur la droite mobile entre les points C et D ; il peut être situé sur le prolongement. Considérons la droite C'D' dont les deux points C' et D' glissent sur les deux droites rectangulaires OX et OY, et cherchons le lieu décrit par le point M. Si l'on appelle a et b les distances MD' et MC', les triangles semblables MPC', D'QM donneront, comme précédemment

$$\frac{MP}{D'Q} = \frac{MC'}{MD'},$$

ou

$$\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a}.$$

C'est sur cette propriété que repose la construction d'un petit instrument appelé *compas elliptique*. Deux pointes sont fixées en deux points C et D, pris à volonté sur une droite CD, et un crayon au point M ; les deux pointes glissent dans des rainures pratiquées sur deux droites rectangulaires OX et OY ; le crayon placé en M décrit l'ellipse d'un mouvement continu.

178—Il est à remarquer que la normale à l'ellipse au point M passe par le point d'intersection K des perpendiculaires élevées par les points C et D sur les deux droites fixes. En effet, si l'on appelle x_1 et y_1 les coordonnées du point K, les triangles semblables MPC, DQM, donnent

$$\frac{x_1 - x}{x} = \frac{b}{a}, \quad \frac{y_1 - y}{y} = \frac{a}{b};$$

d'où

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Ainsi le coefficient angulaire de la droite KM est égal à celui de la normale à l'ellipse au point M.

179—On peut généraliser ce théorème et l'énoncer ainsi : *Quand deux points* E, F, *d'un plan mobile glissent sur deux droites* OA, OB, *situées dans un plan fixe, un point quelconque du plan mobile décrit une ellipse* (fig. 96). Considérons une

position particulière du plan mobile ; aux points E et F élevons des perpendiculaires sur les droites OA et OB, et soit K le point de concours de ces perpendiculaires ; le cercle décrit sur [illegible] diamètre passe par les points [illegible] droite EF étant constante, ainsi que l'angle EOF, le diamètre du cercle est constant. Nous remarquons d'abord que tout point D, situé sur le cercle, décrit une droite OY ; car, pendant le mouvement, les longueurs des côtés du triangle DEF restant invariables, l'angle DEF conserve la même valeur et par suite égale l'angle DOF ; ainsi le point D décrit la droite OY.

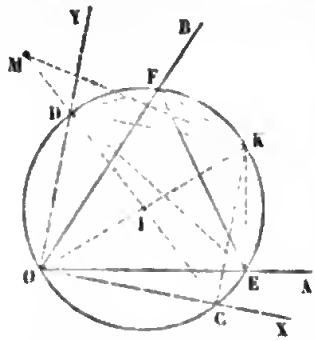


Fig. 96.

Considérons maintenant un point quelconque M du plan mobile. Joignons ce point au centre I du cercle et marquons les deux extrémités C et D de ce diamètre. En vertu de ce qui précède, les deux points C et D glissent sur les deux droites rectangulaires OX et OY ; on en conclut que le point M décrit une ellipse dont les axes, égaux au double des distances MC et MD, sont dirigés suivant les deux droites rectangulaires OX et OY. En particulier le point I décrit un cercle.

Les perpendiculaires élevées par les points C et D sur les droites OX et OY se coupent au point K ; il en résulte que la droite MK est normale à l'ellipse au point M.

Si l'on considère les ellipses décrites par différents points du plan mobile, on voit que les normales à toutes ces ellipses aux points correspondants passent par le même point K. Le lieu du point K, point de concours des normales, dans le plan fixe est un cercle décrit du point O comme centre avec un rayon égal à la distance constante OK.

EXERCICES.

1° Trouver le lieu des sommets des parallélogrammes construits sur les diamètres conjugués d'une ellipse.

2° Trouver le lieu du milieu des cordes menées par un même point dans une ellipse.

3° Une corde d'un cercle se meut parallèlement à elle-même; par les extrémités on mène des droites parallèles à deux directions données; trouver le lieu de leur point de rencontre.

4° Parmi tous les parallélogrammes circonscrits à une même ellipse, les parallélogrammes construits sur deux diamètres conjugués sont minimum.

5° Parmi tous les parallélogrammes inscrits à une même ellipse, ceux dont les diagonales forment un système de diamètres conjugués sont maximum.

6° De toutes les ellipses inscrites à un même parallélogramme, quelle est la plus grande?

7° De toutes les ellipses circonscrites dans un même parallélogramme, quelle est la plus petite?

8° Parmi tous les systèmes de diamètres conjugués de l'ellipse, les axes forment une somme minimum et les diamètres conjugués égaux une somme maximum.

9° Inscrire dans l'ellipse une corde telle que la somme de sa longueur et de la distance de son point milieu au centre soit maximum.

10° Une droite se meut parallèlement à elle-même dans le plan de deux autres; on prend sur elle un point tel que la somme des carrés de ses distances aux intersections avec les droites fixes soit constante : quel est le lieu décrit par le point?

11° Si deux ellipses, tellement situées dans un plan que deux diamètres conjugués de l'une soient respectivement parallèles à deux diamètres conjugués de l'autre, se coupent en quatre points, ces quatre points seront sur une troisième ellipse dans laquelle les diamètres conjugués égaux seront parallèles à ceux qui forment les deux premiers systèmes.

12° Une ellipse tourne autour de son centre, aux points où elle coupe une droite fixe on mène des tangentes à la courbe; trouver le lieu du point d'intersection de ces tangentes.

13° On donne un cercle et une droite fixe passant par son centre; une droite mobile de longueur constante s'appuie par une de ses extrémités sur le cercle, par l'autre sur la droite; trouver le lieu décrit par un point de la droite mobile.

14° Un plan mobile se meut sur un plan fixe, de manière que deux droites du plan mobile restent tangentes respectivement à deux cercles du plan fixe; trouver le lieu tracé par un point du plan fixe sur le plan mobile.

15° Trouver l'aire de l'ellipse définie par l'équation $Ax^2+Bxy+Cy^2=1$.

CHAPITRE V

De l'Hyperbole.

180—Construisons maintenant le lieu défini par l'équation

$$Mx^2+Ny^2+F_1=0,$$

dans laquelle M et N ont des signes contraires. Nous supposerons M positif, N négatif et égal à $-N'$. Si F_1 est égal à zéro, l'équation

$$Mx^2-N'y^2=0,$$

résolue par rapport à y, donne

$$y=\pm\sqrt{\frac{M}{N'}}\,x;$$

elle représente deux droites passant à l'origine. Le cas où F_1 est positif se ramène au cas où F_1 est négatif par la permutation des axes, ce qui revient à remplacer dans l'équation y par x et x par y; nous poserons donc $F_1=-H$; l'équation prend la forme

$$Mx^2-N'y^2=H$$

dans laquelle M, N' et H sont des nombres positifs.

A chaque valeur de x correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires; l'axe des x est donc un axe de symétrie de la courbe; il en est de même de l'axe des y. On

en conclut que l'origine est centre de la courbe ; on peut démontrer cette dernière propriété en observant que si l'équation est vérifiée par les coordonnées x et y d'un point, elle est vérifiée également par les coordonnées $-x$ et $-y$ du point symétrique.

En résolvant l'équation par rapport à y on obtient

$$y = \pm\sqrt{\frac{Mx^2 - H}{N'}}.$$

Pour que y soit réel il faut que la valeur numérique de x soit supérieure à $\sqrt{\frac{H}{M}}$. Portons donc sur l'axe X'X, à partir de l'origine, deux longueurs OA, OA' égales à $\sqrt{\frac{H}{M}}$, et, par les points A et A', menons des parallèles à OY (fig. 97); la courbe n'a aucun point entre ces deux parallèles. Quand x=OA, l'ordonnée y est nulle, ce qui donne le point A ; si l'on fait croître x indéfiniment à partir de OA, la valeur numérique de y croît aussi indéfiniment à partir de zéro ; on a ainsi deux branches de courbe infinies, AD et AD'.

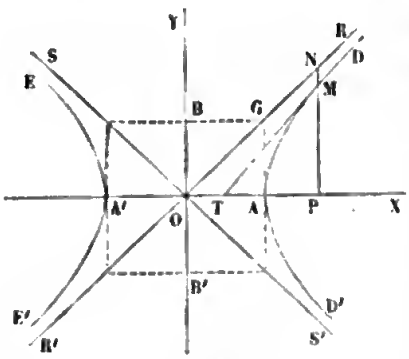


Fig. 97.

En faisant varier x depuis $-$OA' à $-\infty$, on obtient les deux nouvelles branches A'E, A'E' symétriques des précédentes par rapport à OY. Ces quatre branches forment l'hyperbole qui a pour axes de symétrie les deux droites X'X, Y'Y; le premier de ces axes rencontre seul la courbe ; on l'appelle axe *transverse*, le second est l'axe *non traverse* ou l'axe *imaginaire;* les points A et A' sont les deux sommets de la courbe. Si l'on pose, pour abréger $a = \sqrt{\frac{H}{M}}$, $b = \sqrt{\frac{H}{N'}}$, l'équation se met par la forme

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Les dimensions de l'hyperbole dépendent uniquement des deux lignes a et b; on dit que ces deux paramètres sont les longueurs des demi-axes de la courbe, le premier est le demi-axe réel, le second le demi-axe imaginaire.

181—*Les carrés des ordonnées perpendiculaires à l'axe transverse sont entre eux comme les produits des segments correspondants formés sur cet axe.*

En effet de l'équation (1) on déduit

$$\frac{y^2}{x^2-a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

ou

$$\frac{y^2}{(x+a)(x-a)}=\frac{b^2}{a^2},$$

donc

$$\frac{\overline{MP}^2}{A'P\times AP}=\frac{b^2}{a^2}.$$

ASYMPTOTES DE L'HYPERBOLE.

182—L'équation de la courbe résolue par rapport à y est

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

Soient RR', SS' (fig. 97) les droites représentées par les équations

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Considérons la différence NM entre l'ordonnée de la droite OR et celle de la branche AD de la courbe; cette différence, qui a pour expression

$$\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

est constamment positive et tend vers zéro lorsque x augmente indéfiniment. Il en résulte que la branche AD est comprise dans l'angle ROX et se rapproche indéfiniment de la droite OR, qui est asymptote de cette branche A. Les droites

OR′, OS, OS′, sont de même asymptotes des branches A′E′, A′E, AD′.

Les asymptotes R′R, S′S, ayant pour équations

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

ces droites sont les diagonales du rectangle construit sur les axes.

HYPERBOLES CONJUGUÉES.

183—Deux hyperboles sont dites *conjuguées* lorsque, ayant même centre et mêmes axes, l'axe réel de l'une est axe imaginaire de l'autre. Ainsi l'hyperbole proposée a pour conjuguée une autre hyperbole ayant pour axe transverse b et pour axe imaginaire a (fig. 98). L'équation de cette seconde hyperbole est évidemment

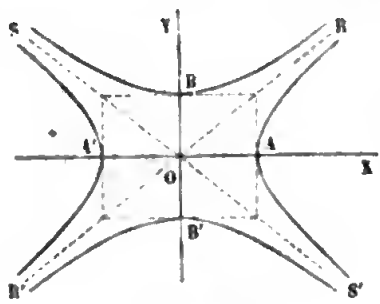


Fig. 98.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Deux hyperboles conjuguées ont les mêmes asymptotes, puisque le rectangle construit sur les axes est le même pour les deux courbes. L'une des courbes est comprise dans les deux angles ROS′, R′OS opposés par le sommet, et l'autre dans les deux autres angles ROS, R′OS′.

HYPERBOLE ÉQUILATÈRE.

184—On dit qu'une hyperbole est équilatère lorsque les axes a et b ont même longueur. Dans ce cas le rectangle des axes devient un carré, et les asymptotes sont perpendiculaires entre elles; l'hyperbole conjuguée est égale à la première; on l'obtient en faisant tourner celle-ci d'un angle droit autour de son centre.

L'hyperbole dont les axes sont a et b peut être construite au moyen de l'hyperbole équilatère dont l'axe est a, comme on a construit l'ellipse ayant pour axes a et b au moyen du cercle

de rayon a, c'est-à-dire que la première hyperbole peut être regardée comme la projection orthogonale de la seconde. Mais cette considération n'est d'aucune utilité dans les constructions graphiques relatives à l'hyperbole, parce que le tracé d'une hyperbole équilatère n'est pas plus simple que celui d'une hyperbole quelconque.

185—Soient x et y les coordonnées d'un point quelconque du plan; considérons le polynôme

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1.$$

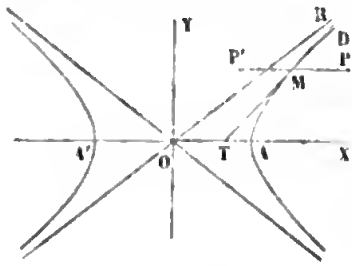


Fig. 99.

Pour un point M appartenant à la courbe, ce polynôme est égal à zéro; si l'on fait marcher un point P à partir de M sur une parallèle à l'axe transverse AA' (fig. 99), le terme $\frac{y^2}{b^2}$ conserve une valeur invariable, tandis que le terme $\frac{x^2}{a^2}$ diminue ou augmente suivant que le point P se rapproche ou s'éloigne de l'axe des y. Il en résulte que le polynôme a une valeur négative pour tous les points situés entre les deux branches de l'hyperbole, et positive pour tous les autres points du plan.

TANGENTE A L'HYPERBOLE.

186—L'équation de la tangente au point M, dont les coordonnées sont x et y, est

$$(2)\quad \frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}-1=0.$$

Pour construire cette droite, on peut déterminer le point T (fig. 97), où elle coupe l'axe OX. Si, dans l'équation (2), on fait $Y=0$, il vient

$$X=OT=\frac{a^2}{x};$$

on obtient cette longueur OT par une troisième proportionnelle.

187—Le coefficient angulaire de la tangente a pour valeur

$$\frac{b^2x}{a^2y}=\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}},$$

Supposons que le point M parcoure la branche AD; en A le coefficient angulaire est infini et la tangente perpendiculaire à l'axe transverse; x augmentant, le coefficient angulaire diminue constamment et tend vers la limite $\frac{b}{a}$, coefficient angulaire de l'asymptote OR; l'angle MTX diminue donc de $\frac{\pi}{2}$ à ROX; en même temps la valeur de OT diminue de a a 0; il en résulte que l'asymptote est la position limite de la tangente quand le point de contact s'éloigne indéfiniment.

MENER UNE TANGENTE PAR UN POINT EXTÉRIEUR.

188—Désignons par x_1 et y_1 les coordonnées du point P. Soit PM la tangente demandée; appelons x et y les coordonnées inconnues du point de contact M; le point de contact étant sur la courbe, on a la relation

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

La tangente au point M a pour équation

$$\frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}-1=0;$$

cette tangente passant par le point P, son équation doit être vérifiée par les coordonnées de ce point, ce qui donne l'équation

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}-1=0.$$

Ainsi les deux coordonnées x et y du point M sont déterminées par les équations simultanées

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

$$(3)\quad \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} - 1 = 0.$$

En éliminant y, on obtient l'équation du second degré

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right) - 2\frac{x_1 x}{a^2} + \left(1 + \frac{y_1^2}{b^2}\right) = 0,$$

dont les racines sont les abscisses des points de contact M et M′ des deux tangentes menées du point P. La condition de réalité des racines est

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b} - 1 < 0,$$

c'est-à-dire que le point P doit être placé entre les deux branches de la courbe. Si le point P est placé dans les angles des asymptotes qui comprennent la courbe, le coefficient $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$ est positif, le produit des deux racines est positif; par suite les deux racines sont de même signe et les deux points de contact sur une même branche de la courbe. Au contraire, si le point P est dans l'un des angles ROS, R′OS′, il y a un point de contact sur chacune des branches.

La résolution des équations simultanées (1) et (3) revient à chercher les points communs aux deux lignes représentées par ces deux équations, l'équation (1) représente l'hyperbole et l'équation (3) la corde des contacts MM′.

TANGENTE PARALLÈLE A UNE DROITE DONNÉE.

189—En appelant m le coefficient angulaire de la droite donnée, on trouve par un calcul analogue à celui du n° 158 que l'équation de la tangente est

$$(4)\quad Y = mX \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}.$$

Pour que le problème soit possible il faut que la valeur de m^2 soit plus grande que $\frac{b^2}{a^2}$, c'est-à-dire que, si la droite donnée passe à l'origine, elle soit comprise dans l'angle ROS. Nous avons vu en effet, n° 187, que la valeur numérique du coefficient angulaire d'une tangente peut varier de ∞ à $\frac{b}{a}$.

190—On ne peut mener à une hyperbole deux tangentes rectangulaires que lorsque l'angle ROS′ est moindre qu'un angle droit, ou a est plus grand que b; quand cette condition est satisfaite, l'équation du lieu du sommet d'un angle droit circonscrit est

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2.$$

Ce lieu est une circonférence dont le centre coïncide avec celui de la courbe.

DIAMÈTRES.

191—L'hyperbole étant rapportée à ses axes, le diamètre qui divise en deux parties égales les cordes dont le coefficient angulaire est m, a pour équation

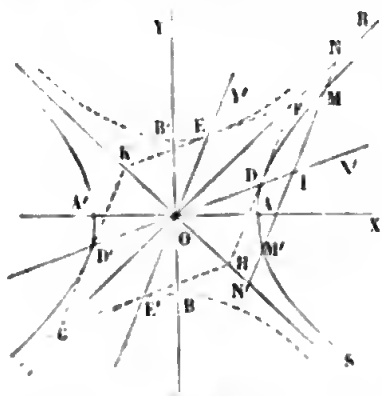


Fig. 100.

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} m = 0,$$

ou

$$y = \frac{b^2}{a^2 m} x.$$

Si l'on désigne par m' le coefficient angulaire du diamètre, on a, entre la direction des cordes et celle du diamètre, la relation

$$(5) \quad m m' = \frac{b^2}{a^2}.$$

Cette relation montre que si l'on prend m' pour coefficient angulaire des cordes, on trouvera m pour coefficient angulaire du diamètre; c'est-à-dire que si la droite DD′ divise en deux parties égales les cordes parallèles à EE′ (fig. 100), réciproquement la droite EE′ divisera en parties égales les cordes parallèles à DD′. Ainsi les deux diamètres DD′, EE′ sont tels que chacun divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre; ce sont deux diamètres conjugués.

L'hyperbole a une infinité de systèmes de diamètres conjugués, puisque l'on peut prendre à volonté l'un des diamètres. La relation (5) exige que m et m' aient le même signe;

si on les suppose positifs, m variant de 0 à $\frac{b}{a}$, m' variera de ∞ à $\frac{b}{a}$; le diamètre DD′ tourne de OA vers l'asymptote OR, et le diamètre EE′ de OY vers la même asymptote. On voit ainsi que, des deux diamètres, l'un rencontre toujours la courbe et que l'autre ne la rencontre pas; que les axes forment le seul système de diamètres conjugués rectangulaires, et que l'angle aigu de deux diamètres conjugués varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0.

On verrait comme pour l'ellipse que la tangente FH en un point D de l'hyperbole est parallèle au diamètre EE′ conjugué du diamètre DD′ qui passe au point de contact.

192—Deux hyperboles conjuguées et le système de leurs deux asymptotes admettent le même diamètre pour la même série de cordes; car les équations des deux courbes sont

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\mp 1=0,$$

et celle des asymptotes

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Ces trois équations ne diffèrent que par le terme constant qui n'entre pas dans l'équation du diamètre

$$f'_x+mf'_y=0.$$

Les trois lieux ont aussi les mêmes systèmes de diamètres conjugués.

Si l'hyperbole est équilatère, la relation $mm'=\frac{b^2}{a^2}$ devient $mm'=1$, ce qui signifie que les angles DOX, EOX sont complémentaires, et par suite que les asymptotes sont bissectrices des angles des diamètres conjugués.

HYPERBOLE RAPPORTÉE A DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

193—Si l'on prend pour axes de coordonnées deux diamètres conjugués d'une hyperbole, nous avons vu que l'équation de la courbe conserve la forme

$$Mx'^2 + Ny'^2 = H.$$

Prenons pour axe des x le diamètre qui rencontre la courbe; on peut supposer H positif, alors M sera positif et N négatif. La longueur du premier demi-diamètre est la distance OD du point O au point de rencontre du diamètre avec la courbe; cette longueur a pour expression $a' = \sqrt{\frac{H}{M}}$. On appelle longueur du second diamètre la quantité $b' = \sqrt{\frac{H}{-N}}$. Si l'on remplace M par $\frac{H}{a'^2}$ et N par $\frac{-H}{b'^2}$, l'équation précédente devient

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} - 1 = 0,$$

Par la transformation des coordonnées, la fonction $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ devenant $\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2}$, il en résulte que l'équation de l'hyperbole conjuguée deviendra

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} + 1 = 0.$$

Le demi-diamètre imaginaire b' de l'hyperbole proposée dirigé suivant OY' a donc pour longueur la distance OE du point O au point E où la droite OY' rencontre l'hyperbole conjuguée.

On voit aussi que la transformation des coordonnées appliquée à l'équation des asymptotes

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

donnera pour équation de ces droites dans le nouveau système d'axes

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0; \qquad \text{ou} \quad y' = \pm \frac{b'}{a'} x.$$

On en conclut que *les diagonales du parallélogramme* FHGK *construit sur deux diamètres conjugués quelconques coïncident avec les asymptotes de l'hyperbole.*

On peut démontrer directement, comme au nº 182, que les droites $y' = \pm \frac{b'}{a'} x'$ sont asymptotes des courbes

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = \pm 1.$$

Les côtés FH, GK du parallélogramme sont tangents à la première hyperbole et les côtés FK, et GH à l'hyperbole conjuguée, de sorte que le parallélogramme est circonscrit au système des deux courbes.

194—Si l'on appelle α et β les angles que font avec l'axe transverse OX les deux demi-diamètres conjugués OD, OE, a' et b' leurs longueurs, on a entre ces quatre quantités variables les trois relations

$$\frac{a'^2 \cos^2 \alpha}{a^2} - \frac{a'^2 \sin^2 \alpha}{b^2} = 1,$$

$$\frac{b'^2 \cos^2 \beta}{a^2} - \frac{b'^2 \sin^2 \beta}{b^2} = -1,$$

$$\frac{\cos \alpha \cos \beta}{a^2} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{b^2} = 0;$$

les deux premières se déduisent des équations des deux hyperboles conjuguées en coordonnées polaires, la troisième exprime que les deux diamètres sont conjugués.

Ces relations sont analogues à celles que nous avons trouvées pour l'ellipse (nº 163); on pourra leur faire subir les mêmes transformations. La troisième relation se mettra sous la forme

$$\frac{\frac{a' \cos \alpha}{a}}{\frac{b' \sin \beta}{b}} = \frac{\frac{a' \sin \alpha}{b}}{\frac{b' \cos \beta}{a}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a' \cos \alpha}{a}\right)^2 - \left(\frac{a' \sin \alpha}{b}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{b' \sin \beta}{b}\right)^2 - \left(\frac{b' \cos \beta}{a}\right)}} = 1;$$

en continuant de la même manière, on arrivera aux équations

$$a'^2 \cos^2 \alpha - b'^2 \cos^2 \beta = a^2,$$

$$a'^2 \sin^2 \alpha - b'^2 \sin^2 \beta = -b^2;$$

Ainsi, *la différence des carrés de projections de deux diamètres conjugués quelconques sur chacun des axes est constante.* En ajoutant ces deux équations membre à membre, on a

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2;$$

la différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est constante et égale à la différence des carrés des axes.

On arrive aussi à la relation

$$a'b' \sin(\beta - \alpha) = ab;$$

d'où l'on conclut que *l'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constante et égale à l'aire du rectangle des axes.*

De la relation $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$, il résulte que si a est différent de b, on ne peut pas avoir $a' = b'$; l'hyperbole n'a pas de diamètres conjugués égaux. Si, au contraire, l'hyperbole est équilatère, on a toujours $a' = b'$; tous les systèmes de diamètres conjugués sont égaux; ce qui s'accorde avec la remarque du n° 192, puisqu'alors les deux diamètres font avec l'asymptote des angles égaux.

195—L'hyperbole et ses deux asymptotes ayant le même diamètre pour une même série de cordes, le milieu I de la corde MM′ est aussi le milieu de la corde NN′ (fig. 100).

Donc *les portions* MN, M′N′ *d'une sécante comprise entre l'hyperbole et ses asymptotes sont égales.*

Si la sécante devient tangente, on a DF = DH; *les portions d'une tangente comprises entre le point de contact et les asymptotes sont égales.*

196—Supposons l'hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués DD′, EE′, dont l'un EE′ est parallèle à une sécante donnée MN; la courbe aura pour équation

$$y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(x^2 - a'^2),$$

et les asymptotes

$$y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}x^2.$$

Dans la figure 100, la sécante MM′ coupe la même branche en deux points, le diamètre parallèle EE′ ne rencontre pas la courbe. On a

$$\overline{MI}^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(\overline{OI}^2 - a'^2),$$

$$\overline{NI}^2 = \frac{b'^2}{a'^2}\overline{OI}^2,$$

par suite

$$\overline{NI}^2 - \overline{MI}^2 = b'^2,$$

ou

$$(NI - MI)(NI + MI) = b'^2;$$

mais $NI - MI = MN$ et $NI + MI = MN'$;

donc $MN \times MN' = b'^2$.

Lorsque la sécante coupe les deux branches de l'hyperbole, le diamètre parallèle rencontre la courbe, et l'on arrive à un résultat analogue. Ainsi

Le produit des segments d'une sécante, compris entre un point de la courbe et les asymptotes, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la sécante.

197—Connaissant les asymptotes RR′, SS′ et un point M de l'hyperbole, on peut obtenir autant de points de la courbe qu'on le veut (fig. 101). Menons, en effet, par le point M une droite quelconque NMN′ qui coupe les asymptotes en N et N′, cette droite rencontrera la courbe en un second point M′ tel que N′M′ = NM.

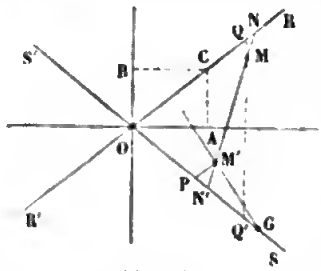


Fig. 101.

On peut également déterminer les directions et les grandeurs des axes. La courbe étant comprise dans les angles ROS, R′OS′, la bissectrice OA de ces deux angles sera l'axe transverse, et la perpendiculaire OB l'axe imaginaire. Menons QMQ′ perpendiculaire sur OA, l'axe imaginaire b sera moyen proportionnel entre MQ et MQ′. En portant sur OB une longueur OB égale à b et en menant BC parallèle à OA, BC sera l'axe réel a.

On peut aussi construire la tangente en un point M′ de la courbe. On mènera par ce point M′P parallèle à une asymptote, on prendra OG = 2OP ; la droite M′G sera la tangente demandée.

198—Lorsqu'on connaît les positions et les grandeurs de deux diamètres conjugués, on obtient aisément les axes. Soient en effet, DD′, EE′ (fig. 102) les deux diamètres, le premier étant réel ; les diagonales du parallélogramme construit sur les deux diamètres sont les asymptotes; connaissant les asymptotes et un point D, on est ramené à la construction précédente.

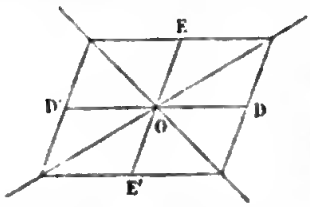


Fig. 102.

CORDES SUPPLÉMENTAIRES.

199—On appelle cordes supplémentaires deux cordes MC, MC′, qui partant d'un même point M de la courbe aboutissent aux extrémités d'un même diamètre CC′ (fig. 103). On démontrera, comme nous l'avons fait au n° 170, pour l'ellipse, que

Deux cordes supplémentaires sont parallèles à un système de diamètres conjugués ;

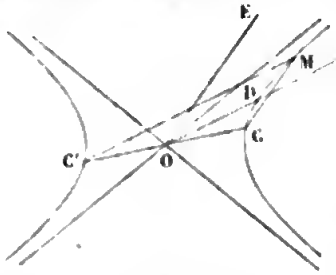


Fig. 103.

et que, réciproquement,

Si par les extrémités d'un diamètre on mène des droites parallèles à deux diamètres conjugués, ces droites se coupent sur l'hyperbole et forment un système de cordes supplémentaires.

HYPERBOLE RAPPORTÉE A SES ASYMPTOTES.

200—Si l'on prend pour axes des coordonnées les deux asymptotes de la courbe, l'équation ne renfermera pas de termes du premier degré, puisque l'origine est au centre ; elle sera donc de la forme

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=H.$$

Les droites parallèles à OY ne coupent la courbe qu'en un point; donc pour chaque valeur de x, y n'a qu'une valeur, ce qui exige que C

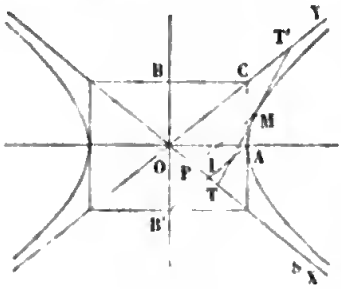


Fig. 104.

soit nul; par la même raison A doit aussi être nul; ainsi l'équation sera simplement

$$(6)\quad Bxy = H, \quad \text{ou} \quad xy = \frac{H}{B} = k^2.$$

Les axes étant pris comme l'indique la figure, la constante $\frac{H}{B}$ est positive, puisque pour tous les points de la courbe les coordonnées x et y ont le même signe. On détermine facilement la constante k^2 lorsqu'on connaît les axes de la courbe; en effet, l'équation (5) doit être vérifiée par les coordonnées de l'un quelconque des points de la courbe, si l'on considère en particulier le sommet A, on a, pour ce point

$$x = y = OI = \frac{AB'}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

d'où

$$k^2 = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

On donne quelquefois à la constante k^2 le nom de puissance de l'hyperbole.

L'hyperbole étant rapportée à ses asymptotes, la tangente TT′ au point M, dont les coordonnées sont x et y, a pour équation

$$(7)\quad yX + xY = 2k^2.$$

L'abscisse du point de rencontre de la tangente avec l'axe OX s'obtient en faisant dans cette équation $Y=0$, d'où

$$X = OT = \frac{2k^2}{y} = 2x = 2\,OP;$$

on reconnaît de nouveau que le point de contact M divise en deux parties égales la portion TT′ de la tangente comprise entre les asymptotes.

AIRE D'UN SEGMENT HYPERBOLIQUE.

201—Nous commencerons par établir le théorème qui sert ordinairement à l'évaluation des aires. Considérons l'aire comprise entre l'axe OX, une courbe, une ordonnée fixe AB, et une ordonnée mobile MP (fig. 105), correspondant à l'abscisse x; cette aire, que nous désignerons par S, est une fonc-

tion de la variable x; nous cherchons sa dérivée. Donnons à x un accroissement $\Delta x = PP'$, assez petit pour que de M en M' l'ordonnée varie dans le même sens; par les points M et M' menons des parallèles MC, M'D à l'axe OX; l'accroissement ΔS de l'aire est plus grand que le parallélogramme MPP'C, et plus petit que le parallélogramme DPP'M'; le premier parallélogramme a pour mesure $y.\Delta x.\sin\theta$, θ étant l'angle des axes, le second $(y+\Delta y)\,\Delta x.\sin\theta$; on a donc

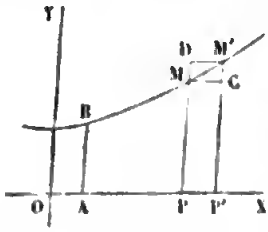


Fig. 105.

$$y.\Delta x.\sin\theta < \Delta S < (y+\Delta y)\Delta x.\sin\theta,$$

et, en divisant par Δx,

$$y\sin\theta < \frac{\Delta S}{\Delta x} < (y+\Delta y)\sin\theta.$$

Supposons maintenant que l'on fasse tendre Δx vers zéro. Le rapport $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ est compris entre deux quantités, l'une $y\sin\theta$, l'autre ayant pour limite cette quantité; donc le rapport a aussi pour limite $y\sin\theta$. Ainsi la dérivée de l'aire considérée comme une fonction de l'abscisse est $y\sin\theta$. Réciproquement l'aire S est l'une des fonctions primitives de $y\sin\theta$, considérée comme une fonction de x.

Quand les axes des coordonnées sont rectangulaires, la dérivée de l'aire est égale à y.

202—Considérons une hyperbole rapportée à ses asymptotes, et proposons-nous d'évaluer l'aire comprise entre l'asymptote OX, l'hyperbole, l'ordonnée fixe AB correspondant à l'abscisse a, et l'ordonnée variable MP correspondant à l'abscisse x (fig. 106). L'équation de la courbe étant

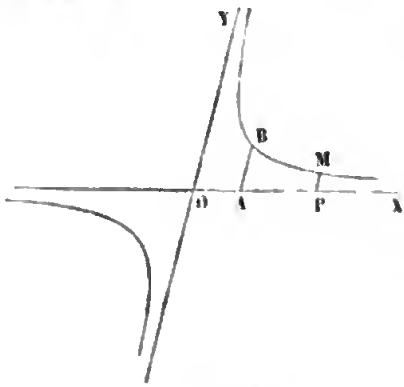


Fig. 106.

$$xy = k^2,$$

on a

$$y = \frac{k^2}{x},$$

et par suite

$$y \sin\theta = k^2 \sin\theta . \frac{1}{x} .$$

Or $\frac{1}{x}$ est la dérivée de Lx, donc $k^2 \sin\theta \times \frac{1}{x}$ est la dérivée de $k^2 \sin\theta Lx$, et par conséquent on a

$$S = k^2 \sin\theta \, L\, x + C.$$

On détermine la constante C par la condition que l'aire soit nulle pour $x = a$, ce qui donne $C = -k^2 \sin\theta \, La$, et, par suite,

$$(8) \quad S = k^2 \sin\theta \, (Lx - La) = k^2 \sin\theta \, L\left(\frac{x}{a}\right).$$

L'abscisse a restant constante, si l'on fait augmenter x indéfiniment, l'aire S augmente aussi au delà de toute limite. La même chose a lieu quand on fait tendre a vers zéro, x restant fixe.

Dans le cas particulier où l'hyperbole est équilatère, on a $\sin\theta = 1$; si l'on suppose en outre $k^2 = 1$, et que l'on compte l'aire depuis l'ordonnée qui répond à l'abscisse 1, c'est-à-dire au sommet de la courbe, la formule précédente se réduit à

$$S = L(x).$$

C'est à cause de cette propriété que l'on désigne aussi les logarithmes népériens sous le nom de logarithmes hyperboliques.

Si l'on suppose $k = 1$ et $a = 1$, la formule (8) devient

$$S = \sin\theta \, L\,(x).$$

On pourra prendre θ de manière que S soit le logarithme de x dans un système quelconque dont la base est plus grande que e.

EXERCICES.

1° On donne deux points A et B, par ces deux points on mène deux droites mobiles AM et BM telles que l'angle MAB soit double de MBA ; trouver le lieu des points d'intersection M.

2° Quel est le lieu des centres des circonférences qui interceptent des longueurs données sur les côtés d'un angle donné?

3° On donne deux droites fixes, une droite mobile coupe les deux premières de manière à former un triangle de grandeur constante; on demande le lieu des centres de gravité de ces triangles.

4° Les sécantes menées de l'un quelconque des points d'une hyperbole à deux points fixes pris sur la courbe interceptent sur l'une ou l'autre asymptote des longueurs constantes.

5° Toute corde d'une hyperbole divise en deux parties égales la portion de l'une ou l'autre asymptote comprise entre les tangentes à ses deux extrémités.

6° Si, sur une corde d'une hyperbole considérée comme diagonale, on construit un parallélogramme dont les côtés soient parallèles respectivement aux asymptotes, l'autre diagonale passera par le centre.

7° On donne un point fixe et une droite fixe. Un angle de grandeur constante tourne autour du point fixe; trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle formé par les côtés de l'angle et la droite fixe.

8° Un triangle ABC est inscrit dans une hyperbole; deux de ses côtés ont des directions invariables; trouver le lieu du milieu du troisième côté.

9° Sur l'une des diagonales d'un rectangle prise pour corde on décrit un cercle; trouver le lieu des extrémités des diamètres parallèles à la seconde diagonale.

10° Étant donnés un angle et un point fixe, par ce point on mène une sécante quelconque, et par les points où cette sécante rencontre les deux côtés de l'angle, on mène des droites respectivement parallèles à ces côtés; trouver le lieu du point d'intersection de ces parallèles.

CHAPITRE VI.

De la Parabole.

203—Le second des types auxquels on réduit l'équation générale du second degré est $Ny^2 + Px = 0$, ou

$$(1) \quad y^2 = 2px,$$

en posant $-\frac{P}{N} = 2p$. Le cas où p est négatif se ramène au cas où p est positif par le changement du sens des x positifs; nous supposerons p positif. On voit immédiatement que la courbe représentée par l'équation (1) est symétrique par rapport à l'axe des x et qu'elle passe à l'origine. L'équation (1), résolue par rapport à y, donne

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Pour que l'ordonnée soit réelle il est nécessaire que l'abscisse soit positive; si l'on fait croître x de 0 à $+\infty$, la valeur absolue de y croît aussi de 0 à ∞; on a ainsi deux branches de courbes infinies AD et AD', qui forment la parabole (fig. 107).

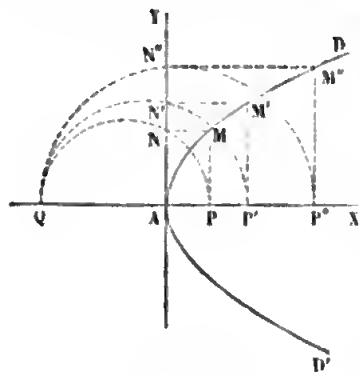


Fig. 107.

La droite AX est l'axe de la parabole; le point A en est le sommet; la longueur p, qui détermine la courbe, s'appelle le paramètre de la parabole.

CONSTRUCTION DE LA COURBE PAR POINTS.

204—L'ordonnée MP du point M est moyenne proportionnelle entre la quantité constante $2p$ et l'abscisse AP. Portons sur AX et dans le sens des x négatifs une longueur AQ égale à $2p$; puis décrivons diverses circonférences ayant leurs centres sur QX et passant au point Q; ces circonférences coupent de nouveau l'axe AX aux points P, P'.... et AY aux points N, N'...

Par les points P, P'... menons des perpendiculaires à l'axe AX; par les points N, N'... des perpendiculaires à AY; les points de rencontre M, M'... sont des points de la parabole.

205—Des relations

$$\overline{MP}^2 = 2p\,AP, \quad \overline{M'P'}^2 = 2p\,AP',$$

on déduit

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{M'P'}^2} = \frac{AP}{A'P'}.$$

Les carrés des ordonnées perpendiculaires à l'axe de la parabole sont entre eux comme les segments de l'axe compris entre le sommet et les ordonnées.

Par le point M de la courbe menons une parallèle à l'axe, et imaginons qu'un point mobile parcoure cette parallèle. Si dans la fonction

$$y^2 - 2px$$

on remplace x et y par les coordonnées du point mobile, cette fonction se réduira à zéro lorsque le mobile sera en M, elle aura une valeur positive pour une position du mobile extérieure à la courbe et une valeur négative pour une position intérieure.

206—Nous avons vu que les branches infinies de l'hyperbole ont des asymptotes; il n'en est pas de même dans la parabole. Et d'abord, puisque y augmente indéfiniment avec x, il n'y a pas d'asymptote parallèle à l'axe de la parabole. En second lieu, soit $y_1 = ax + b$ l'équation d'une droite quelconque oblique à l'axe, la différence des ordonnées des points de la droite et de la courbe qui correspondent à une même abscisse est égale à

$$ax + b - \sqrt{2px}$$

et peut se mettre sous la forme

$$x\left(a + \frac{b}{x} - \sqrt{\frac{2p}{x}}\right).$$

Quand x augmente indéfiniment, le premier facteur augmentant indéfiniment, et le second tendant vers la valeur a diffé-

rente de zéro, le produit augmente indéfiniment. Donc il n'y a pas non plus d'asymptote oblique à l'axe.

TANGENTE A LA PARABOLE.

207—La tangente au point M, dont les coordonnées sont x et y, a pour équation

$$Y - y = \frac{2p}{2y}(X - x),$$

ou

$$yY = pX + y^2 - px;$$

le point M étant sur la courbe, on a $y^2 = 2px$, et l'équation précédente se réduit à

$$(2) \quad yY = p(X + x).$$

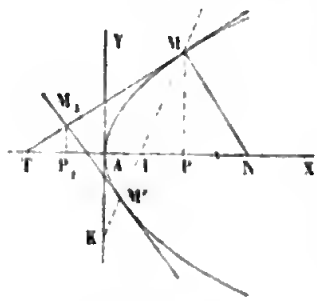


Fig. 108.

Soit T le point où la tangente rencontre l'axe de la parabole (fig. 108); si dans l'équation (2) on fait $Y = 0$, on trouve $X = -x$; donc $AT = AP$.

Ceci donne un moyen facile de construire la tangente à la parabole en un point donné M; on abaissera la perpendiculaire MP sur l'axe, on prendra $AT = AP$ et l'on joindra MT.

MENER UNE TANGENTE PAR UN POINT EXTÉRIEUR.

208—Soit M_1 le point donné dont les coordonnées sont x_1 et y_1, x et y les coordonnées inconnues du point de contact M; le point M étant sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation (1). L'équation de la tangente au point M est

$$yY = p(X + x).$$

Cette tangente passant au point M_1, les coordonnées x_1 et y_1 doivent vérifier l'équation précédente, ce qui donne entre x et y la deuxième relation

$$y_1 y = p(x_1 + x).$$

Ainsi on obtient x et y en résolvant les équations simultanées

$$(1) \quad y^2 - 2px = 0,$$
$$(3) \quad y_1 y - p(x_1 + x) = 0.$$

Digitized by Google

On en déduit

$$y = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1},$$
$$x = \frac{y^2}{2p};$$

ces valeurs sont réelles toutes les fois que le point M_1 est extérieur à la courbe.

Au lieu de résoudre les équations simultanées (1) et (3), on peut construire le lieu défini par chacune d'elles, les points communs seront les points de contact; l'équation (3) est donc l'équation de la corde des contacts MM'. Pour construire cette droite, on cherche les points où elle coupe les axes des coordonnées; si l'on fait $y = 0$, on trouve $x = -x_1$, c'est-à-dire que AI est égal à AP_1; si l'on fait $x = 0$, on trouve $y = \frac{px_1}{y_1}$; le point K s'obtiendra par une quatrième proportionnelle.

TANGENTE PARALLÈLE A UNE DROITE DONNÉE.

209—Si l'on désigne par m le coefficient angulaire de la droite donnée, les coordonnées inconnues du point de contact s'obtiennent par les équations

$$(1) \quad y^2 - 2px = 0,$$
$$(4) \quad m = \frac{p}{y};$$

on en déduit

$$y = \frac{p}{m}, \quad x = \frac{p}{2m^2};$$

d'où l'équation de la tangente

$$(5) \quad Y = mX + \frac{p}{2m}.$$

NORMALE A LA PARABOLE.

210—La normale MN en un point M de la parabole, dont les coordonnées sont x et y, a pour équation

$$(6) \quad Y - y = -\frac{y}{p}(X - x).$$

Soit N le point où elle rencontre l'axe. Si dans l'équation (6) on fait $Y = 0$, on trouve

$$PN = X - x = p.$$

Ainsi *dans la parabole la sous-normale* PN *est constante et égale au paramètre p.*

DIAMÈTRES DE LA PARABOLE.

211—En appliquant l'équation générale des diamètres des courbes du second degré à la parabole dont l'équation est $y^2 - 2px = 0$, on obtient pour l'équation du diamètre des cordes définies par le coefficient angulaire m,

$$(7) \quad my - p = 0, \text{ ou } y = \frac{p}{m}.$$

Ainsi : *tous les diamètres de la parabole sont parallèles à l'axe.*

Comme on peut disposer de m de manière que $\frac{p}{m}$ ait telle valeur que l'on voudra, il en résulte que réciproquement : *toute parallèle à l'axe est un diamètre.*

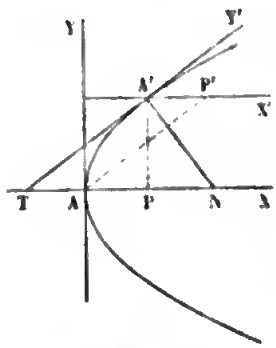


Fig. 109.

Soit A' le point de rencontre du diamètre et de la courbe (fig. 109), l'ordonnée y du point A' sera $y = \frac{p}{m}$, et le coefficient angulaire de la tangente en ce point $\frac{p}{y} = m$. Donc, *la tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle aux cordes que ce diamètre divise en deux parties égales.*

PARABOLE RAPPORTÉE A UN DE SES DIAMÈTRES ET A LA TANGENTE A SON EXTRÉMITÉ.

212—Nous avons vu que, lorsqu'on prend pour axes des coordonnées un diamètre A'X' et la tangente A'Y' à son extrémité, l'équation de la parabole prend la forme

$$(8) \quad y'^2 = 2p'x'.$$

Si l'on appelle a et b les coordonnées du point A' par rapport aux axes primitifs, et que l'on mène AP' parallèle à A'T, on sait que l'on a A'P' = AT = AP ; les coordonnées du sommet A

par rapport aux nouveaux axes sont donc a et $\sqrt{4a^2+b^2}$; comme elles doivent vérifier l'équation (8), il en résulte

$$2p'=\frac{4a^2+b^2}{a}=\frac{4a^2+2pa}{a}=2p+4a.$$

On a aussi

$$p'=\frac{\overline{A'T}^2}{2AT}=\frac{\overline{A'T}^2}{TP}=TN.$$

213—La parabole, rapportée à un diamètre A'X et à la tangente A'Y (fig. 110), ayant pour équation $y^2=2p'x$, il est évident que l'équation

$$yY=p'(X+x)$$

représentera, soit la tangente au point M, si x et y désignent les coordonnées de ce point, soit la corde des contacts des tangentes issues d'un point extérieur, si x et y désignent les coordonnées de ce point extérieur.

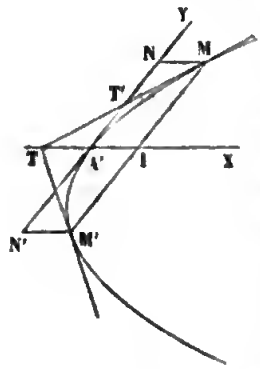


Fig. 110.

Si l'on mène les tangentes aux deux extrémités M et M' d'une même corde, elles coupent le diamètre en un même point T, tel que A'T = A'I. Il en résulte que la droite des contacts MM', relative à un point extérieur T, est divisée en deux parties égales par le diamètre TX qui passe en ce point, et que de plus on a A'I = A'T.

Ceci donne le moyen de construire une parabole par points, lorsqu'on connaît deux tangentes TM, TM', et les points de contact M et M'. On mène la corde MM', on joint le milieu I au point T, le milieu A' de la droite TI est un point de la courbe, et la tangente en ce point est parallèle à MM'. Prenons la tangente A'T', qui touche la courbe en A', successivement avec chacune des tangentes données, nous déterminerons deux nouvelles tangentes avec leurs points de contact; et ainsi de suite. Cette méthode est fréquemment employée pour raccorder deux droites par un arc de parabole, lorsqu'on ne peut se servir d'un arc de cercle, c'est-à-dire lorsque les distances TM et TM' ne sont pas égales.

AIRE D'UN SEGMENT DE PARABOLE.

214—Proposons-nous d'évaluer l'aire S du triangle mixtiligne A'IM. Si l'on considère cette aire comme une fonction de l'abscisse du point M, la derivée S' est donnée par la formule

$$S' = y \sin\theta = \sqrt{2px}.\sin\theta = \sqrt{2p}.\sin\theta.x^{\frac{1}{2}},$$

θ étant l'angle YA'X des axes. On en déduit

$$S = \frac{2}{3}\sqrt{2p}.\sin\theta.x^{\frac{3}{2}} + C,$$

C désignant une constante. Mais la constante est nulle puisque l'aire se réduit à zéro pour $x=0$. Ainsi

$$S = \frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}}\sin\theta = \frac{2}{3}x\sqrt{2px}\sin\theta = \frac{2}{3}xy\sin\theta.$$

L'aire S est égale aux deux tiers du parallélogramme A'IMN; et par suite l'aire du triangle mixtiligne A'NM est le tiers du même parallélogramme.

EXERCICES.

1° Lieu du sommet d'un angle circonscrit à la parabole, et tel que le triangle formé par les côtés de l'angle et l'arc de parabole ait une aire constante.

2° Lieu des points desquels on peut mener à une parabole deux normales rectangulaires.

3° Une sécante tourne autour d'un point fixe pris sur l'axe d'une parabole; par les points où elle coupe la parabole on mène des normales; trouver le lieu du point de concours de ces normales.

4° Une parabole se meut parallèlement à elle-même, de manière que son sommet décrive la parabole dans sa position initiale; du sommet de cette parabole on mène des tangentes à la parabole mobile ; trouver le lieu des points de contact.

5° Lieu du point tel que la somme des carrés des normales menées de ce point à une parabole donnée soit constante.

6° Étant donnée une courbe du second degré inscrite dans un angle on mène une tangente quelconque à cette courbe ;

trouver le lieu du point de concours des médianes ou des hauteurs du triangle formé par la tangente mobile et les côtés de triangle. Trouver aussi le lieu du centre du cercle circonscrit au même triangle.

7° Étant donnée une ellipse, par un point fixe on mène deux droites rectangulaires quelconques, et aux points où ces droites rencontrent l'ellipse on mène des tangentes à cette ellipse. Trouver le lieu des points de rencontre de ces tangentes.

8° Même problème, quand on remplace les droites rectangulaires par des droites parallèles à deux diamètres conjugués d'une autre ellipse donnée.

9° Un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet placé sur une courbe du second degré donnée ; aux points où les côtés de l'angle rencontrent la courbe on mène des tangentes à cette courbe. Trouver le lieu des points de rencontre de ces tangentes.

CHAPITRE VII.

Foyers et Directrices.

215—Proposons-nous d'abord la question suivante :

Étant donnés un point fixe F et une droite fixe DE (fig. 111), trouver le lieu du point dont les distances au point fixe et à la droite fixe sont entre elles dans un rapport constant.

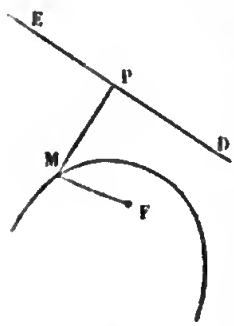


Fig. 111.

Traçons dans le plan des axes rectangulaires quelconques; appelons α et β les coordonnées du point F, et soit $mx+xy+p=0$ l'équation de la droite DE; les distances d'un point quelconque M du lieu au point F et à la droite DE sont données par les formules

$$MF=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2},$$

$$MP=\frac{mx+ny+p}{\pm\sqrt{m^2+n^2}};$$

si l'on désigne par k le rapport constant $\frac{MF}{MP}$, le lieu aura pour équation

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = k\frac{mx+ny+p}{\pm\sqrt{m^2+n^2}},$$

ou

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\frac{k^2(mx+ny+p)^2}{m^2+n^2}.$$

Ce lieu est une courbe du second degré. La quantité B^2-4AC, qui sert à distinguer l'espèce de la courbe, se réduisant à $4(k^2-1)$, la courbe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que le rapport k est inférieur, égal, ou supérieur à l'unité.

Le point F s'appelle *foyer* de la courbe, la droite DE *directrice*.

216—Il est aisé de voir que la perpendiculaire FD abaissée du foyer sur la directrice est un axe de la courbe (fig. 112).

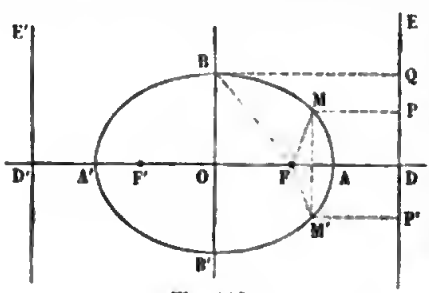


Fig. 112.

Car soit M un point quelconque du lieu; le point M', symétrique du premier par rapport à la droite FD, appartiendra aussi au lieu, puisque les distances M'F, M'P' sont respectivement égales aux distances MF, MP.

Considérons d'abord le cas où k est plus petit que 1; le lieu est une ellipse. Sur l'axe FD, on peut déterminer deux points A et A', tels que

$$\frac{AF}{AD}=\frac{A'F}{A'D}=k;$$

ces deux points sont les extrémités de l'une des axes AA' de l'ellipse. Le milieu O en est le centre. La perpendiculaire BB', menée par le centre au premier axe AA', est le second axe de l'ellipse. Pour avoir les extrémités du second axe, il faut sur

cette droite trouver un point B tel que l'on ait $\frac{BF}{BQ}=k$; or on a

$$k=\frac{AF}{AD}=\frac{A'F}{A'D}=\frac{AF+A'F}{AD+A'D}=\frac{AA'}{2OD}=\frac{OA}{OD};$$

et par suite

$$\frac{BF}{BQ}=\frac{OA}{OD};$$

les deux dénominateurs BQ et OD étant égaux entre eux, les numérateurs BF et OA sont aussi égaux. Si donc du foyer F comme centre, avec un rayon égal à OA, on décrit un cercle, ce cercle déterminera sur le second axe les deux sommets B et B'. La longueur OB étant plus petite que BF ou que OA, il en résulte que l'axe AA' perpendiculaire à la directrice est le grand axe de l'ellipse, l'axe parallèle BB' est le petit axe. Si l'on fait tourner la figure autour du petit axe BB' pour la rabattre de l'autre côté, le point F vient en F', la droite DE en D'E' et le même rapport k donnera naissance à la même ellipse.

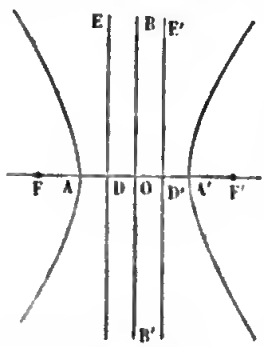


Fig. 113.

Supposons maintenant k plus grand que 1 ; la courbe est une hyperbole. Sur l'axe FD, on peut déterminer deux points A et A', tels que

$$\frac{AF}{AD}=\frac{A'F}{A'D}=k;$$

ces deux points sont les extrémités de l'axe transverse AA' de l'hyperbole (fig. 113). Le milieu O en est le centre. La perpendiculaire BB', menée par le centre à l'axe transverse AA', est l'axe non transverse de l'hyperbole. Ainsi l'axe transverse de l'hyperbole est perpendiculaire à la directrice. Si l'on fait tourner la figure autour de BB' pour l'appliquer de l'autre côté, le foyer F vient en F', la directrice DE en D'E'; le foyer F' avec la directrice D'E', et le même rapport k donne la même hyperbole.

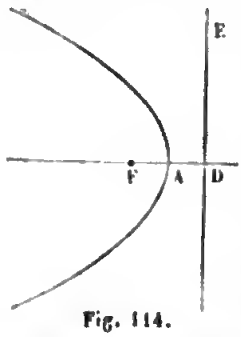


Fig. 114.

Enfin lorsque $k=1$, la courbe est une parabole. La perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice est l'axe et le milieu A de la distance FD est le sommet de la parabole (fig. 114).

217—Nous avons étudié le lieu des points tels que les distances de chacun d'eux à un point fixe F et à une droite fixe DE sont dans un rapport constant, et nous avons vu que ce lieu est représenté par l'équation

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=k\frac{mx+ny+p}{\pm\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Cette équation montre que la distance du foyer F à un point quelconque M de la courbe est égale à une fonction entière et du premier degré des coordonnées x et y du point M.

Réciproquement, si un point fixe F jouit de cette propriété que sa distance à un point quelconque M de la courbe soit égale à une fonction entière et du premier degré des coordonnées x et y du point M, ce point F est un foyer, c'est-à-dire qu'il existe une droite DE (fig. 111), telle que le rapport des distances de chacun des points de la courbe au point F et à la droite DE soit constant. En effet, supposons que l'on ait

$$FM=\pm(mx+ny+p),$$

en désignant par $mx+ny+p$ une fonction entière et du premier degré des coordonnées x et y du point M. Considérons la droite DE qui a pour équation

$$mx+ny+p=0;$$

la distance du point M à cette droite est donnée par la formule

$$MP=\frac{mx+ny+p}{\pm\sqrt{m^2+n^2}}.$$

On a donc

$$\frac{MF}{MP}=\sqrt{m^2+n^2}.$$

Ainsi le rapport des distances de chacun des points de la courbe au point fixe F et à la droite fixe DE est constant; le point F est donc un foyer de la courbe, et la droite DE la

directrice correspondante. En désignant par k la valeur du rapport constant, on a $k=\sqrt{m^2+n^2}$.

Voilà pourquoi on définit souvent le foyer d'une courbe du second degré un point fixe F dont la distance à un point quelconque M de la courbe s'exprime par une fonction entière et du premier degré des coordonnées du point M. On obtient l'équation de la directrice en égalant cette fonction à zéro.

Il est évident *à priori* que cette propriété algébrique du foyer est indépendante de la position des axes des coordonnées dans le plan, puisqu'elle a une signification géométrique bien précise; d'ailleurs il est clair qu'une fonction entière et du premier degré conserve ce même caractère quand on change les coordonnées.

Si l'on prend l'axe des y parallèle à la directrice et pour axe des x une droite quelconque, l'équation de la directrice devant être de la forme $mx+p=0$, il en résulte que le coefficient n est nul et par suite que la distance FM du foyer à un point quelconque M de la courbe est égale à une fonction entière et du premier degré $\pm(mx+p)$ de l'abscisse x du point M.

Nous allons nous occuper maintenant de la question inverse; étant donnée une courbe du second degré, trouver son foyer et sa directrice, c'est-à-dire trouver dans le plan de la courbe un point et une droite tels que le rapport des distances de chacun des points de la courbe au point fixe et à la droite fixe soit constant. Comme nous l'avons dit, cette question revient à la suivante : trouver un point tel que sa distance à chacun des points de la courbe soit égale à une fonction entière et du premier degré des coordonnées du point de la courbe.

FOYERS ET DIRECTRICES DE L'ELLIPSE.

218—Pour simplifier le calcul, supposons l'ellipse rapportée à ses axes et soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

son équation. D'après ce que nous avons dit précédemment, (n° 216), le foyer doit être situé sur le grand axe et la directrice perpendiculaire à cet axe, et par conséquent parallèle à l'axe des y; il en résulte que la distance du foyer à un point quelconque de l'ellipse s'exprimera par une fonction entière et du premier degré de l'abscisse de ce point. Appelons α l'abscisse du foyer et δ la distance de ce foyer à un point quelconque de la courbe; on a

$$\delta = \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2},$$

et par suite

$$\delta^2 = (x-\alpha)^2 + y^2;$$

si l'on remplace y^2 par sa valeur tirée de l'équation de l'ellipse, il vient

$$\delta^2 = (x-\alpha)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

ou, en ordonnant,

$$\delta^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + b^2.$$

Pour que la quantité δ soit une fonction rationnelle en x, il faut que son carré δ^2, qui est un polynôme du second degré, soit un carré parfait, ce qui exige que l'on ait

$$\alpha^2 - \frac{(a^2-b^2)(\alpha^2+b^2)}{a^2} = 0,$$

ou

$$\alpha^2 = a^2 - b^2,$$

et par suite

$$\alpha = \pm\sqrt{a^2-b^2}.$$

On trouve ainsi deux foyers F et F′ (fig. 115) situés sur le grand axe et à égale distance de part et d'autre du centre. Pour les construire, du sommet B du petit axe comme centre, avec un rayon égal à a, on décrira un cercle; les points F et F′ où ce cercle coupe le grand axe sont

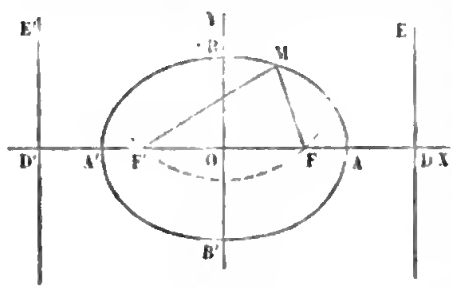


Fig. 115.

les foyers. Posons, pour abréger $a^2-b=c^2$, d'où $\alpha=\pm c$; on a

$$\delta^2=\frac{c^2}{a^2}x^2\mp 2cx+a^2=\left(a\mp\frac{cx}{a}\right)^2,$$

d'où

$$\delta=\pm\left(a\mp\frac{cx}{a}\right).$$

Le double signe dans la parenthèse se rapporte aux deux foyers; et il faudra choisir le signe en avant de la parenthèse de manière à obtenir une quantité positive.

La distance du foyer à un point quelconque de l'ellipse est exprimée ainsi par une fonction entière de l'abscisse; en égalant à zéro cette fonction, on obtient les équations des directrices

$$a\mp\frac{cx}{a}=0,$$

ou

$$x=\pm\frac{a^2}{c}.$$

Au foyer F correspond la directrice DE, qui a pour équation $x=\frac{a^2}{c}$; au foyer F′ la directrice D′E′ qui a pour équation $x=-\frac{a^2}{c}$. On construira le point D par une troisième proportionnelle.

Le rapport constant $k=\sqrt{m^2+n^2}$ est ici égal à m ou à $\frac{c}{a}$. Ainsi le rapport constant des distances de chacun des points de l'ellipse au foyer et à la directrice est égal au rapport de la distance FF′ des foyers au grand axe AA′. Ce rapport $\frac{c}{a}$ est ce qu'on appelle *l'excentricité* de l'ellipse.

THÉORÈME I.

219—*La somme des distances de chacun des points de l'ellipse aux deux foyers est constante et égale au grand axe.*

Nous avons trouvé pour expression de la distance d'un point quelconque de l'ellipse à l'un ou l'autre foyer

$$\delta = \pm\left(a \mp \frac{cx}{a}\right).$$

Dans l'ellipse, le rapport $\frac{c}{a}$ étant moindre que l'unité et l'abscisse x moindre que a en valeur absolue, le terme $\frac{cx}{a}$ est plus petit que a en valeur absolue et par conséquent la parenthèse est toujours positive; il faudra la faire précéder du signe $+$. Quant au double signe dans la parenthèse, le signe supérieur se rapporte au foyer F, le signe inférieur au foyer F′; on a donc (fig. 115)

$$MF = a - \frac{cx}{a},$$

$$MF' = a + \frac{cx}{a};$$

d'où l'on déduit

$$MF + MF' = 2a.$$

220—Corollaire I. *La somme des distances d'un point intérieur à l'ellipse aux deux foyers est plus petite que le grand axe. La somme des distances d'un point extérieur est plus grande que le grand axe.*

Considérons d'abord un point N (fig. 116) situé à l'intérieur de l'ellipse. Joignons ce point aux deux foyers et prolongeons la droite F′N jusqu'à sa rencontre avec l'ellipse en M. Le point M appartenant à l'ellipse, la somme des deux rayons vecteurs MF + MF′ est égale au grand axe AA′; mais la ligne droite NF est plus petite que la ligne brisée NM + MF; en ajoutant de part et d'autre la même longueur F′N, on voit que le chemin F′N+NF est plus petit que F′M+MF, c'est-à-dire plus petit que AA′.

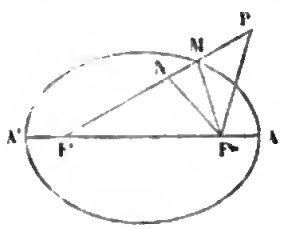


Fig. 116.

Considérons maintenant un point P situé hors de l'ellipse; la

droite PF′ rencontre l'ellipse en un point M. La ligne brisée MP+PF est plus grande que la ligne droite MF; en ajoutant de part et d'autre la même longueur F′M, on voit que le chemin F′P+PF est plus grand que F′M+MF, c'est-à-dire plus grand que AA′.

Il est clair que les réciproques sont vraies. Si la somme des distances d'un point du plan aux deux foyers est plus petite que le grand axe, ce point est intérieur à l'ellipse. Si la somme est plus grande que le grand axe, le point est extérieur.

Il résulte de là que l'on peut considérer l'ellipse comme le lieu des points dont la somme des distances aux deux foyers est constante. C'est ainsi qu'on définit l'ellipse en Géométrie élémentaire, et c'est sur cette propriété que repose la construction de l'ellipse par points, ou d'un mouvement continu, dont nous avons parlé au commencement (nos 12 et 13).

221—Corollaire II. *L'ellipse est le lieu des points également distants du foyer* F *et du cercle décrit de l'autre foyer* F′ *comme centre, avec un rayon égal au grand axe.* Si l'on joint les foyers à un point quelconque M de l'ellipse, et si l'on prolonge le rayon vecteur F′M d'une longueur MH égale à MF, on obtient une longueur F′H constante et égale au grand axe; le lieu du point H est donc la circonférence décrite du foyer F′ comme centre avec le grand axe pour rayon. La portion MH du rayon étant le plus court chemin du point M à cette circonférence, on voit que le point M de l'ellipse est également distant du foyer F et de la circonférence. On a donné à ce cercle le nom de *cercle directeur.*

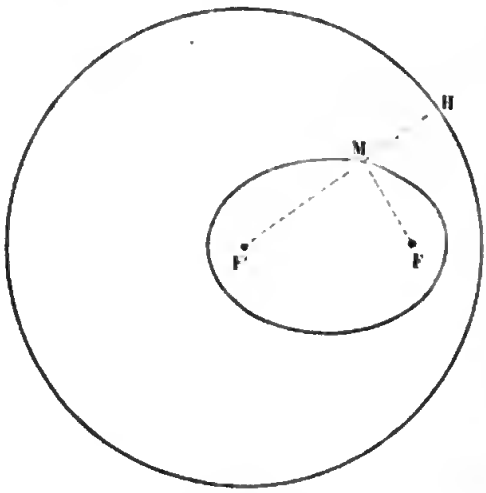


Fig. 117.

THÉORÈME II.

222—*La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs, qui vont du point de contact aux deux foyers.*

Prenons deux points voisins M et M′ (fig. 118) sur l'ellipse; du foyer F comme centre, avec FM pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupera en C le rayon vecteur FM′, la longueur M′C représente la différence des deux rayons vecteurs FM et FM′, ou l'accroissement qu'éprouve le rayon vecteur FM quand on passe du point M au point voisin M′. De même, si du foyer F′ comme centre, avec F′M pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupera en D le rayon vecteur F′M′ prolongé, la longueur M′D représentera la différence des deux rayons vecteurs F′M et F′M′, ou la diminution qu'éprouve le rayon vecteur F′M quand on passe du point M au point M′. Ainsi, quand on passe du point M au point M′, le rayon vecteur FM éprouve un accroissement M′C, tandis que l'autre rayon vecteur F′M éprouve une diminution M′D. Puisque la somme des deux rayons vecteurs FM + F′M reste constante, l'augmentation de l'un est égale à la diminution de l'autre, et par conséquent les deux longueurs M′C et M′D sont égales.

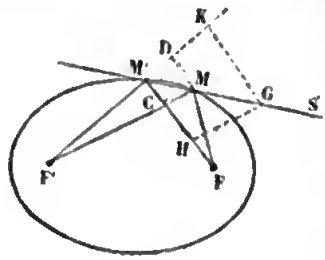


Fig. 118.

Par les deux points M et M′ menons la sécante MS; dans les deux cercles considérés précédemment, traçons les cordes MC et MD. Sur la sécante MS portons une longueur MG, arbitraire, mais invariable, et par le point G menons GH parallèle à MC, GK parallèle à MD; à cause des parallèles, on a les rapports égaux

$$\frac{M'C}{M'H}=\frac{M'M}{M'G}=\frac{M'D}{M'K};$$

puisque les deux longueurs M′C et M′D sont égales, il en résulte que les deux longueurs M′H et M′K sont aussi égales.

Supposons maintenant que le point M′ se rapproche indéfini-

ment du point M; la sécante MS tend vers une position limite, qui est la tangente à l'ellipse. En même temps, les points C et D se rapprochent aussi du point M, les cordes MC et MD, prolongées, tendent vers les tangentes aux cercles décrits des points F et F′ comme centres avec FM et F′M pour rayons, et par conséquent deviennent perpendiculaires aux rayons FM et F′M; leurs parallèles GH et GK prennent aussi les directions perpendiculaires à ces mêmes rayons, et, comme les rayons vecteurs FM′ et F′M′ se confondent avec FM et F′M, les angles H et K deviennent droits.

Les limites des deux triangles M′GH, M′GK sont deux triangles rectangles MGH, MGK (fig. 119); ces deux triangles, ayant l'hypoténuse MG commune et les côtés MH et MK égaux entre eux comme limites des longueurs égales M′H et M′K, sont égaux; d'où l'on conclut l'égalité des deux angles GMH, GMK. Il en résulte que la tangente MT à l'ellipse divise en deux parties égales l'angle FMK formé par l'un des rayons vecteurs MF et le prolongement de l'autre F′M.

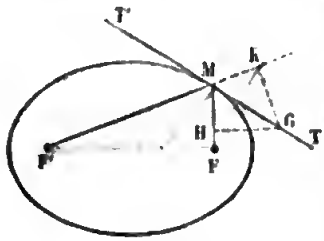


Fig. 119.

L'angle F′MT′ étant égal à son opposé par le sommet GMK, on voit que la tangente TT′ fait, avec les deux rayons vecteurs qui vont au point de contact, des angles égaux FMT, F′MT′.

223—Corollaire I. Menons au point M (fig. 120) une perpendiculaire MN à la tangente TT′, nous aurons la normale à l'ellipse. Les deux angles FMN, F′MN, sont égaux comme complémentaires des angles égaux FMT, F′MT′; ainsi *la normale à l'ellipse au point M est bissectrice de l'angle FMF′ des rayons vecteurs qui vont de ce point aux deux foyers.*

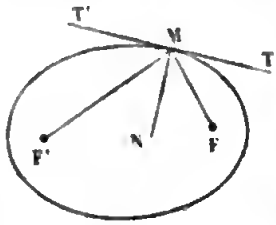


Fig. 120.

224—Corollaire II. Supposons qu'une lumière soit placée au foyer F (fig. 121) d'une ellipse; les rayons lumineux, par-

tant du point F, se réfléchissent sur l'ellipse en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Soit FM l'un de ces rayons; menons la tangente TT′ à l'ellipse en ce point; le rayon réfléchi, devant faire avec MT′ un angle égal à FMT, sera dirigé suivant MF′. Ainsi les rayons réfléchis viennent tous concourir au second foyer F′ où ils forment une image très-brillante de la flamme placée au premier foyer F. C'est de là que vient la dénomination de *foyer*.

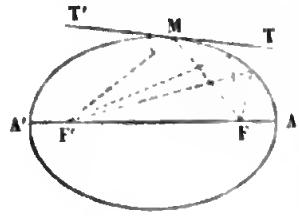


Fig. 121.

225—Corollaire III. Réciproquement, l'ellipse est la seule courbe qui jouisse de la propriété que sa tangente fasse extérieurement des angles égaux avec les rayons vecteurs qui vont du point de contact à deux points fixes F et F′. Cherchons, en effet, l'équation de la courbe en coordonnées bi-polaires et désignons par u et v les deux rayons vecteurs MF, MF′ (fig. 118). Quand on passe d'un point M de la courbe au point voisin M′, les deux rayons vecteurs u et v éprouvent des variations

$$\Delta u = +M'C, \quad \Delta v = -M'D,$$

et l'on a

$$\frac{\Delta v}{\Delta u} = -\frac{M'D}{M'C} = -\frac{M'K}{M'H}.$$

Quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, la droite M′M devient tangente et les deux angles H et K, comme nous l'avons dit, deviennent droits. Nous supposons d'ailleurs les deux angles GMH, GMK (fig. 119) égaux entre eux; les deux triangles rectangles GMH, GMK sont donc égaux, et l'on a MH = MK. Le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta u}$ tend vers une limite égale à $-\frac{MK}{MH}$, et par conséquent égal à -1. Si l'on considère v comme une fonction de u, on voit que la dérivée de cette fonction est égale à -1; en remontant à la fonction primitive, on a $v = -u + C$; et par suite $u + v = C$. Donc la courbe est une ellipse.

226 – Corollaire IV. *Le lieu des projections des foyers sur les tangentes à l'ellipse est le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre.* La tangente étant perpendiculaire sur le milieu I de la droite FH, le point I est la projection du foyer F sur la tangente. Joignons ce point au centre O de l'ellipse. La droite OI, qui divise en deux parties égales les côtés F'F, FH du triangle F'FH, est parallèle au troisième côté F'H, et en est la moitié; la longueur F'H étant égale au grand axe AA', la distance OI est constante et égale à OA. Donc le lieu du point I est la circonférence de cercle décrite du point O comme centre, avec OA pour rayon.

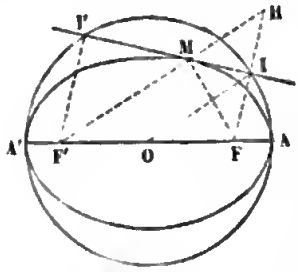


Fig. 122.

PROBLÈME I.

227—*Mener une tangente à l'ellipse en un point* M *donné sur l'ellipse.*

Nous avons déjà résolu ce problème, ainsi que les suivants, en considérant l'ellipse comme la projection d'un cercle. Nous allons traiter les mêmes questions par une autre méthode qui pourra être appliquée à l'hyperbole et à la parabole.

Prolongez le rayon vecteur F'M (fig. 122) d'une longueur MH égale à l'autre rayon vecteur MF, et par le point M menez une droite TT' perpendiculaire à FH; vous aurez la tangente demandée.

Car, dans le triangle isocèle FMH, la droite MT, perpendiculaire abaissée du sommet sur la base FH, divise l'angle au sommet en deux parties égales. Cette droite, étant bissectrice de l'angle FMH, formé par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre, coïncide avec la tangente à l'ellipse.

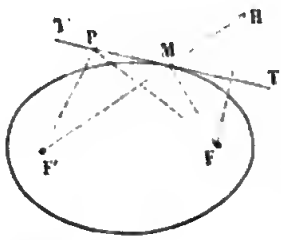


Fig. 123.

228—Remarque. Il est bon de remarquer que tous les

points de la tangente, excepté le point de contact M, sont situés hors de l'ellipse. Soit P un point quelconque de la tangente, joignons ce point aux deux foyers et au point H. La tangente, étant perpendiculaire sur le milieu de FH, la distance PF égale PH, et par conséquent la ligne brisée F'P + PF égale la ligne brisée F'P + PH ; mais cette dernière est plus grande que la ligne droite F'H qui est égale au grand axe de l'ellipse, puisqu'on a prolongé le rayon vecteur F'M d'une longueur MH égale à MF. La somme des distances du point P aux deux foyers étant plus grande que le grand axe, ce point est situé hors de l'ellipse.

La ligne brisée F'M+MF est le plus court chemin allant du point F' au point F en passant par un point de la tangente.

On dit qu'une ligne brisée est *convexe*, lorsqu'elle est située tout entière d'un même côté par rapport à chacun de ses côtés indéfiniment prolongé. De même, on dit qu'une courbe est convexe lorsqu'elle est située tout entière d'un même côté par rapport à chacune de ses tangentes indéfiniment prolongée. Il résulte de ce qui précède que l'ellipse est une courbe fermée convexe.

PROBLÈME II.

229—*Mener une tangente à l'ellipse par un point extérieur* P.

Supposons le problème résolu et soit PM (fig. 124) la tangente demandée. Si l'on prolonge F'M d'une longueur MH égale à FM, on sait que la tangente PM est perpendiculaire sur le milieu de la droite FH ; il en résulte que la distance PH est égale à PF. La question revient à déterminer le point H. Puisque la droite F'H est égale au grand axe AA', le point H est situé sur la circonférence décrite du foyer F' comme centre avec AA' pour

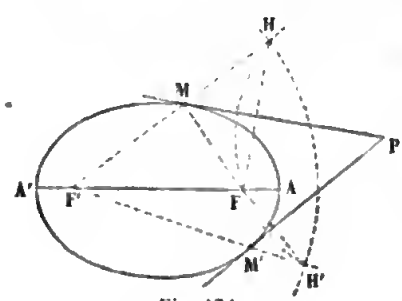


Fig. 124.

rayon. D'autre part, la distance PH étant egale à PF, le point H est sur la circonférence décrite du point P comme centre avec PF pour rayon; le point H est donc à l'intersection de ces deux circonférences. On déduit de là la construction suivante :

Du foyer F′ comme centre, avec un rayon égal au grand axe, décrivez un cercle. Du point P comme centre, avec un rayon égal à la distance PF de ce point à l'autre foyer, décrivez un second cercle, qui coupera le premier au point H. Joignez FH, et du point P menez une perpendiculaire à la droite FH, vous aurez la tangente demandée. Le point de contact M sera déterminé par l'intersection de la tangente avec la droite F′H.

Les deux cercles se coupent en un second point H′; en menant de même du point P une perpendiculaire à FH′, on aura une seconde tangente PM′, dont on déterminera le point de contact M′ à l'aide de la droite F′H′.

Il est à remarquer que ces constructions peuvent être effectuées sans que l'ellipse soit tracée. Il suffit que l'on connaisse les foyers et le grand axe.

PROBLÈME III.

230—*Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée* KL.

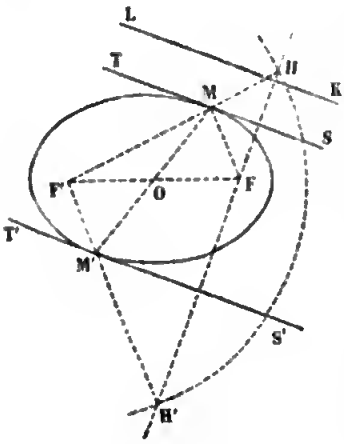


Fig. 125.

Supposons le problème résolu, et soit ST la tangente demandée (fig. 125). Si l'on prolonge F′M d'une longueur MH égale à MF, on sait que la tangente est perpendiculaire sur le milieu de FH. On en déduit la construction suivante :

Du foyer F′ comme centre, avec un rayon égal au grand axe, décrivez un cercle; par l'autre foyer F menez une droite FH perpendiculaire à la droite donnée KL; cette droite coupera la circonférence en un point H;

sur le milieu de FH, élevez une perpendiculaire ST, vous aurez la tangente demandée. Le point de contact sera déterminé par l'intersection de la tangente avec la droite F'H.

La droite FH prolongée rencontre la circonférence en un second point H'; en élevant une perpendiculaire sur le milieu de FH', on obtiendra une seconde tangente S'T', dont on déterminera le point de contact M' par la droite F'H'.

PROBLÈME IV.

231—*Une ellipse étant définie par ses foyers et son grand axe, déterminer les points où elle est coupée par une droite donnée* MM'.

Soit M l'un des points où la droite donnée coupe l'ellipse; joignons ce point aux deux foyers et prolongeons le rayon vecteur F'M d'une longueur MH égale à MF; le point H appartient au cercle directeur décrit du foyer F' comme centre; si du point M comme centre, avec un rayon égal à MF, on décrit un cercle, ce cercle sera tangent en H au cercle directeur; en abaissant du foyer F une perpendiculaire sur la droite donnée et prolongeant cette perpendiculaire d'une longueur égale à elle-même, on obtient un second point F_1 appartenant à ce même cercle. La question revient donc à trouver le centre M d'un cercle passant par les deux points donnés F et F_1 et tangent au cercle directeur. Pour cela, par les deux points F et F_1 on fait passer un cercle quelconque, qui coupe le cercle directeur en deux points K et K'; du point I, intersection des deux droites FF_1 et KK', on mène une tangente IH au cercle directeur; le point M, où la droite FH coupe la droite donnée, sera le point cherché.

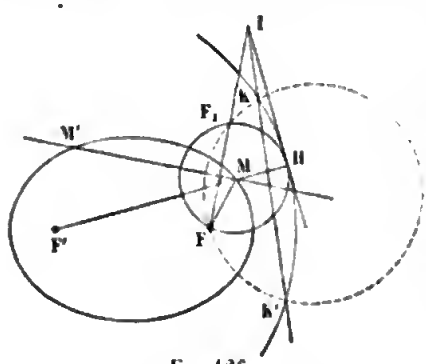


Fig. 126.

On a en effet

$$\overline{IH}^2 = IK \times IK' = IF \times IF_1;$$

donc le cercle qui passe par les trois points F, F_1, H est tan-

gent en H au cercle directeur. Comme on peut mener du point I deux tangentes au cercle directeur, on aura deux points M et M'.

FOYERS ET DIRECTRICES DE L'HYPERBOLE.

232—Supposons aussi l'hyperbole rapportée à ses axes, et soit

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

son équation. Le foyer devant être situé sur l'axe transverse et la directrice perpendiculaire à cet axe, ainsi que nous l'avons remarqué (n° 216), la distance δ du foyer F à un point quelconque M de la courbe s'exprimera par une fonction entière et du premier degré de l'abscisse du point M. Si l'on appelle α l'abscisse du foyer, on a

$$\delta^2=(x-\alpha)^2+y^2,$$

ou, en remplaçant y^2 par sa valeur tirée de l'équation de la courbe,

$$\delta^2=(x-\alpha)^2+\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

et par suite

$$\delta^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-2\alpha x+\alpha^2-b^2.$$

Pour que ce polynôme soit un carré parfait, il faut que la condition

$$\alpha^2-\frac{a^2+b^2}{a^2}(\alpha^2-b^2)=0,$$

soit remplie; on en déduit

$$\alpha=\pm\sqrt{a^2+b^2}.$$

On obtient ainsi deux foyers F et F' situés sur l'axe transverse à même distance du centre (fig. 127). Pour déterminer graphiquement les foyers, par le sommet A, on élève une perpendiculaire AG sur l'axe transverse jusqu'à l'asymptote, et on prend OF=OG. Si l'on pose, pour abréger $c^2=a^2+b^2$, d'où $\alpha=\pm c$, il vient

$$\delta^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} \mp 2cx + a^2 = \left(\frac{cx}{a} \mp a\right)^2,$$

et par suite

$$\delta = \pm\left(\frac{cx}{a} \pm a\right).$$

En égalant à zéro cette fonction du premier degré, on obtient les équations des directrices

$$x = \mp\frac{a^2}{c}.$$

Au foyer F correspond la directrice DE, au foyer F′ la directrice D′E′. Du point O comme centre, avec OA pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupe l'asymptote au point H, ce point appartient à la directrice. En effet, les deux triangles OAG, OHF, qui ont un angle commun O, les côtés OA=OH et OF=OG, sont égaux, et l'angle OHF est droit; si du point H, on abaisse une perpendiculaire HD sur l'axe transverse OA, on a $\overline{OH}^2 = OF \times OD$, et par suite $OD = \frac{a^2}{c}$. Ainsi la droite DH est la directrice.

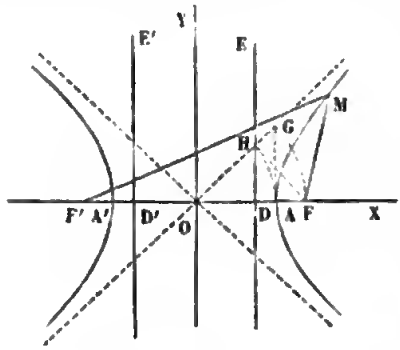


Fig. 127.

Le rapport constant $k = \sqrt{m^2 + n^2}$ est égal à m ou à $\frac{c}{a}$; c'est le rapport de la distance FF′ des foyers à l'axe transverse AA′; c'est l'excentricité de l'hyperbole.

THÉORÈME III.

233—*La différence des distances de chacun des points de l'hyperbole aux deux foyers est constante et égale à l'axe transverse.*

Nous avons trouvé pour expression de la distance d'un point de la courbe à l'un ou l'autre foyer

$$\delta = \pm\left(\frac{cx}{a} \mp a\right),$$

le signe supérieur dans la parenthèse se rapporte au foyer F, le signe inférieur au foyer F′ ; on a donc

$$MF' = \pm\left(\frac{cx}{a} + a\right).$$

Il faut, en avant de la parenthèse, choisir le signe de manière à avoir des longueurs positives. Dans l'hyperbole, le rapport $\frac{c}{a}$ étant plus grand que l'unité et x plus grand que a en valeur absolue, le premier terme $\frac{cx}{a}$ en valeur absolue est plus grand que a. Il faudra donc faire précéder les parenthèses du signe + ou du signe —, suivant que le point M est sur la branche de droite ou sur celle de gauche. Dans le premier cas, on a

$$MF = \frac{cx}{a} - a,$$

$$MF' = \frac{cx}{a} + a,$$

d'où

$$MF' - MF = 2a.$$

Dans le second cas, on a

$$MF = -\left(\frac{cx}{a} - a\right),$$

$$MF' = -\left(\frac{cx}{a} + a\right);$$

d'où

$$MF - MF' = 2a.$$

234—Corollaire. *La différence des distances d'un point situé entre les deux branches de l'hyperbole aux deux foyers est plus petite que l'axe transverse; lorsque le point est situé dans les deux autres parties du plan, la différence est plus grande que l'axe transverse.*

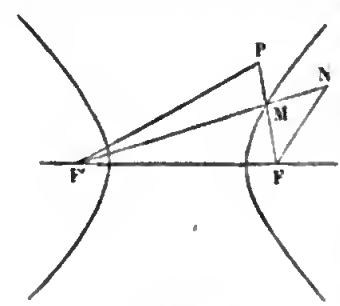


Fig. 128.

Soit P un point situé entre les deux branches de la courbe (fig. 128); la droite PF rencontre l'hyperbole au point M. On a

$$PF' - PM < MF';$$

si l'on retranche MF de part et d'autre, il vient

$$PF' - PF < MF' - MF ;$$

cette dernière différence étant égale à $2a$, la première est plus petite que $2a$.

Considérons maintenant un point N situé à droite de la première branche d'hyperbole; la droite NF' rencontre cette branche en M; on a

$$NF < NM + MF ,$$

et, en ajoutant de part et d'autre MF',

$$NF + MF' < NF' + MF ;$$

d'où

$$NF' - NF > MF' - MF.$$

La seconde différence étant égale à $2a$, la première est plus grande que $2a$.

Il résulte de là que l'on peut considérer l'hyperbole comme le lieu des points dont la différence aux deux foyers est constante. C'est sur cette propriété que repose la construction par points ou d'un mouvement continu que nous avons donnée au commencement (nos 20 et 21).

235—Corollaire II. *La distance d'un point quelconque de l'hyperbole au foyer* F *est égale à l'une des normales menées de ce point au cercle décrit de l'autre foyer* F' *comme centre avec un rayon égal à l'axe transverse.*

Pour un point M de la première branche; on a

$$MF' - MF = 2a = F'N,$$

et par suite

$$MF = MF' - F'N = MN.$$

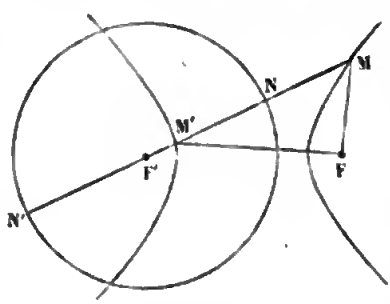


Fig. 129.

Pour un point M' de la seconde branche, on a

$$M'F - M'F' = 2a = F'N',$$

et par suite

$$M'F = M'F' + F'N' = M'N'.$$

Dans le premier cas, la portion MN de la normale mesure la distance du point M au cercle et la première branche d'hyperbole est le lieu des points également distants du foyer F et du cercle directeur.

THÉORÈME IV.

236—*La tangente à l'hyperbole est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs qui vont du point de contact aux deux foyers.*

Prenons deux points voisins M et M′ sur l'hyperbole (fig. 130).

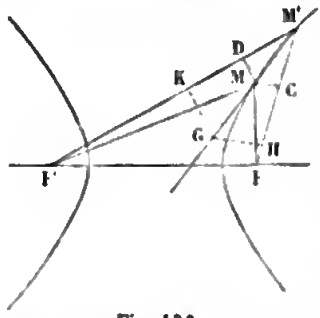


Fig. 130.

Du foyer F, comme centre, avec un rayon égal à FM, décrivons un arc de cercle qui coupera en C le rayon vecteur FM′; du foyer F′ comme centre, avec un rayon égal à F′M, décrivons un arc de cercle qui coupera en D le rayon vecteur F′M′; quand on passe du point M au point M′, les deux rayons vecteurs FM, F′M éprouvent des accroissements égaux à M′C et à M′D; puisque la différence est constante, ces deux accroissements sont égaux entre eux.

Sur la sécante MM′, prenons une longueur arbitraire MG, et, par le point G, menons GH parallèle à la corde MC et GK parallèle à la corde MD. A cause des parallèles, on a

$$\frac{M'C}{M'H}=\frac{M'M}{M'G}=\frac{M'D}{M'K};$$

puisque les deux longueurs M′C et M′D sont égales, il en résulte que les deux longueurs M′H et M′K sont aussi égales. Lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, la sécante MM′ tend vers une position limite qui est la tangente à l'hyperbole au point M; en même temps, les cordes MC et MD deviennent tangentes aux cercles décrits des foyers comme centres, et par conséquent perpendiculaires à FM, F′M; leurs parallèles GH, GK prennent aussi des directions perpendiculaires à ces mêmes rayons, et les angles H et K deviennent droits. Les deux triangles M′GH, M′GK, qui ont un côté M′G commun et un côté M′H égal à M′K, deviennent donc rectangles, et par conséquent égaux entre eux; il en résulte que les angles GM′H, GM′K deviennent égaux; ainsi la tangente à l'hyperbole au point M est bissectrice de l'angle FMF′.

237—Corollaire I. L'hyperbole est la seule courbe qui jouisse de cette propriété; car en appelant u et v les rayons MF et MF′, Δu et Δv leurs accroissements, on a

$$\frac{\Delta v}{\Delta u}=\frac{M'D}{M'C}=\frac{M'K}{M'H}.$$

Si l'on suppose que les angles GM′H, GM′K deviennent égaux, quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, les deux triangles M′GH, M′GK deviennent égaux, ainsi que les côtés M′H et M′K. On a donc

$$lim\,\frac{\Delta v}{\Delta u}=1.$$

En remontant à la fonction primitive, on a

$$v=u+C,$$

d'où

$$v-u=C.$$

238—Corollaire II. *Une ellipse et une hyperbole homofocales se coupent à angle droit.* On dit que deux courbes du second degré sont homofocales lorsque leurs foyers coïncident; on appelle angle de deux courbes l'angle de leurs tangentes au point d'intersection. Soit M le point d'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole qui ont mêmes foyers F, F′ (fig. 131); la bissectrice MN de l'angle FMF′ est d'une part normale à l'ellipse, d'autre part tangente à l'hyperbole; donc les tangentes MT, MN aux deux courbes sont perpendiculaires entre elles.

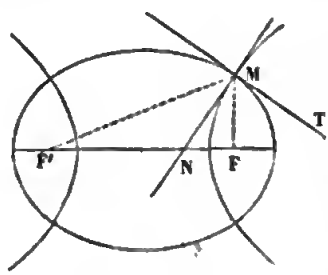


Fig 131.

PROBLÈME V.

239—*Mener une tangente à l'hyperbole par un point* M *donné sur l'hyperbole.*

Sur le rayon vecteur MF′ prenez une longueur MH égale à l'autre rayon vecteur MF, et par le point M menez une droite MT perpendiculaire à FH; vous aurez la tangente demandée (fig. 132).

Remarque. Il est bon de remarquer que la tangente est tout entière située entre les deux branches de l'hyperbole. Soit P un point quelconque de cette tangente, on a

$$PF' - PH < F'H,$$

et par suite

$$PF' - PF < 2a;$$

donc le point P est situé entre les deux branches de l'hyperbole. Une branche d'hyperbole, étant située d'un même côté de chacune de ses tangentes, est une courbe convexe.

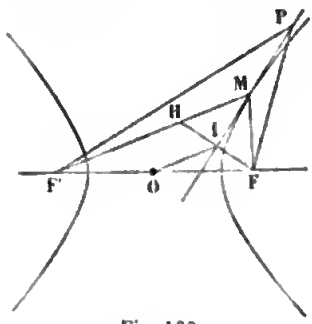


Fig. 132.

La tangente étant perpendiculaire sur le milieu I de FH, le point I est la projection du foyer F sur la tangente. La droite OI, étant parallèle à F'H et égale à la moitié de F'H, est constante; il en résulte que *le lieu des projections des foyers sur les tangentes est le cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre.*

PROBLÈME VI.

240—*Mener des tangentes à l'hyperbole par un point donné* P *situé entre les deux branches de l'hyperbole.*

Soit PM l'une des tangentes demandées (fig. 133); si du rayon vecteur MF' on retranche MH=MF, on sait que la tangente PM est perpendiculaire sur le milieu de FH. La question revient à déterminer le point H; ce point se trouve à l'intersection du cercle décrit du foyer F' comme centre, avec un rayon égal à $2a$, et du cercle décrit du point P comme centre avec un rayon égal à PF.

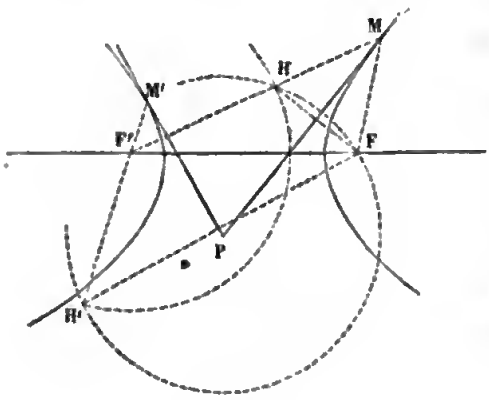


Fig. 133.

Les deux cercles se coupent en un second point H'; en menant du point P une perpendiculaire sur FH', on aura une seconde

tangente PM′, dont on déterminera le point de contact à l'aide de la droite F′H′.

Lorsque le point P est situé sur l'une des asymptotes, l'une des tangentes menées par le point P coïncide avec cette asymptote, et le point de contact s'éloigne à l'infini.

PROBLÈME VII.

241—*Mener à l'hyperbole des tangentes parallèles à une droite donnée* OL.

Du foyer F′ comme centre, avec un rayon égal à $2a$, on décrira le cercle directeur; du foyer F, on mènera une droite perpendiculaire à OL (fig. 134); cette droite coupera le cercle en deux points H et H′; par les milieux des droites FH et FH′, on mènera des parallèles à OL; ces parallèles seront les tangentes demandées. Les droites F′H, F′H′ détermineront les points de contact M et M′.

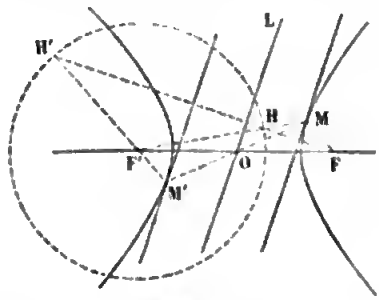


Fig. 134.

Pour que le problème soit possible, il faut que la droite donnée OL, que l'on peut supposer menée par le centre, ne rencontre pas l'hyperbole; alors la perpendiculaire FH′ menée par le foyer F coupera le cercle directeur en deux points.

PROBLÈME VIII.

242—*Trouver les points de rencontre d'une droite et d'une hyperbole définie par ses foyers et son axe transverse.*

La construction est exactement la même que pour l'ellipse.

FOYER ET DIRECTRICE DE LA PARABOLE.

243—Cherchons maintenant le foyer et la directrice de la parabole. Supposons la courbe rapportée à son axe et à la tangente au sommet; son équation sera

$$y^2 = 2px.$$

Nous savons, d'après la remarque faite au n° 216, que le foyer doit être situé sur l'axe de la parabole et la directrice per-

pendiculaire à cet axe; il en résulte que la distance δ du foyer F à un point quelconque M de la courbe doit s'exprimer par une fonction entière et du premier degré de l'abscisse du point M. En désignant par α l'abscisse du foyer, on a

$$\delta^2=(x-\alpha)^2+y^2,$$

ou, en remplaçant y^2 par sa valeur tirée de l'équation de la courbe,

$$\delta^2=(x-\alpha)^2+2px=x^2+2(p-\alpha)x+\alpha^2.$$

Pour que ce polynôme soit un carré parfait, il faut que la condition

$$(p-\alpha)^2-\alpha^2=0$$

soit remplie; d'où

$$\alpha=\frac{p}{2}.$$

On obtient ainsi un seul foyer F situé sur l'axe de la parabole et à une distance du sommet A égale à la moitié du paramètre (fig. 135).

Si l'on remplace α par sa valeur, il vient

$$\delta^2=x^2+p\,x+\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2;$$

d'où

$$\delta=x+\frac{p}{2}.$$

En égalant à zéro l'expression de δ, on obtient l'équation de la directrice

$$x=-\frac{p}{2}.$$

La directrice DD′ est à l'axe perpendiculaire et à une distance AD du sommet égale à AF.

Le rapport constant $k=\sqrt{m^2+n^2}$ se réduit ici à l'unité; ainsi chacun des points de la parabole est également distant du foyer et de la directrice.

THÉORÈME V.

244—*Tout point intérieur à la parabole est plus rapproché du foyer que de la directrice; tout point extérieur est, au contraire, plus rapproché de la directrice que du foyer.*

Considérons d'abord un point N (fig. 135) situé à l'intérieur de la parabole; joignons-le au foyer et abaissons de ce point une perpendiculaire NE sur la directrice. Cette perpendiculaire rencontre la courbe en un point M que nous joignons au foyer. Le point M appartenant à la parabole, les distances MF et ME sont égales. Mais la ligne droite NF est plus courte que la ligne brisée NM + MF; si l'on remplace MF par son égale ME, on voit que la distance NF est plus petite que NE. Ainsi le point intérieur N est plus près du foyer que de la directrice.

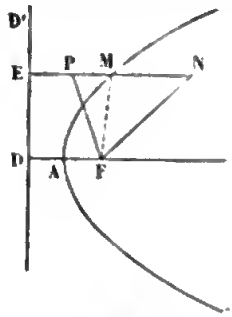


Fig. 135.

Considérons maintenant un point extérieur P, situé entre la courbe et la directrice. Joignons-le au foyer et abaissons sur la directrice une perpendiculaire PE que nous prolongerons jusqu'à sa rencontre en M avec la courbe. Le point M appartenant à la parabole, les distances MF et ME sont égales; la ligne droite MF ou son égale ME est plus courte que la ligne brisée MP + PF, si l'on retranche MP de part et d'autre, on voit que PE est plus courte que PF. Ainsi le point extérieur P est plus près de la directrice que du foyer.

Lorsque le point P est situé à gauche de la directrice, il est évidemment plus près de la directrice que du foyer.

Il résulte de là que la parabole peut être considérée comme le lieu des points également distants du foyer et de la directrice. C'est ainsi qu'on définit la parabole en Géométrie élémentaire, et c'est sur cette propriété que repose la construction de la parabole par points ou d'un mouvement continu, dont nous avons parlé au commencement (nos 24 et 25).

THÉORÈME VI.

243—*La tangente à la parabole fait des angles égaux avec la parallèle à l'axe et le rayon vecteur menés par le point de contact.*

Prenons sur la parabole deux points voisins M et M' (fig. 136),

que nous joindrons au foyer et desquels nous abaisserons des perpendiculaires ME, M'E' sur la directrice. Du foyer F comme centre, avec FM pour rayon, décrivons un arc de cercle MC, et par le point M menons une parallèle MC' à la directrice. La longueur M'C est la différence des deux rayons vecteurs FM et FM'; c'est l'accroissement qu'éprouve le rayon vecteur FM quand on passe du point M au point M'. De même la longueur M'C' est la différence des deux perpendiculaires ME et M'E'; c'est l'accroissement qu'éprouve la perpendiculaire ME quand on passe du point M au point M'. Comme le rayon vecteur FM reste constamment égal à la perpendiculaire ME, il en résulte que les deux accroissements M'C et M'C' sont égaux entre eux.

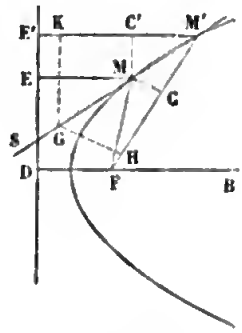


Fig. 136.

Menons la sécante MS par les deux points M et M', et traçons la corde MC dans le cercle décrit du foyer comme centre. Sur la sécante portons une longueur arbitraire MG, et, par le point G, menons GH parallèle à MC et GK parallèle à MC'. A cause des parallèles, on a les rapports égaux

$$\frac{M'C}{M'H}=\frac{M'M}{M'G}=\frac{M'C'}{M'K};$$

puisque les deux longueurs M'C et M'C' sont égales, les deux longueurs M'H et M'K, qui leur sont proportionnelles, sont aussi égales.

Supposons maintenant que le point M' se rapproche indéfiniment du point M; la sécante MS tendra vers la tangente MT à la parabole; la corde MC prolongée tendra de même vers la tangente au cercle, qui est perpendiculaire au rayon FM; la parallèle GH prendra de même une direction perpendiculaire à FM, et, comme FM' coïncidera avec FM, l'angle H deviendra droit. On voit par là que les deux trian-

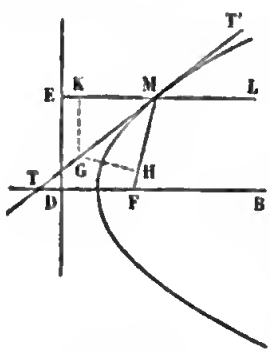


Fig. 137.

gles M'GH, M'GK ont pour limites deux triangles rectangles MGH, MGK (fig. 137); ces deux triangles rectangles, ayant l'hypoténuse MG commune, et les côtés MH et MK égaux entre eux comme limites des longueurs égales M'H et M'K, sont égaux; d'où l'on conclut l'égalité des deux angles GMH, GMK. Ainsi la tangente MT à la parabole est bissectrice de l'angle FME, formé par le rayon MF et la perpendiculaire ME abaissée du point de contact sur la directrice. Si l'on prolonge EM suivant ML, les deux angles GMK, T'ML, étant égaux comme opposés par le sommet, on voit que les deux angles TMF, T'ML, formés par la tangente avec le rayon vecteur et la parallèle ML à l'axe, sont égaux.

246—Corollaire I. Supposons qu'une lumière soit placée au foyer F (fig. 138) de la parabole; les rayons lumineux, partant du foyer F, se réfléchissent sur la parabole en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Soit FM l'un de ces rayons; menez la tangente TT' à la parabole en ce point; le rayon réfléchi, devant faire un angle LMT' égal à FMT, sera parallèle à l'axe AB de la parabole. Ainsi tous les rayons réfléchis seront parallèles à l'axe.

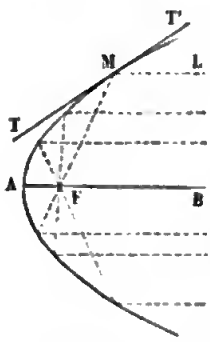


Fig. 138.

C'est d'après ce principe que l'on construit les réflecteurs employés dans les réverbères et les lanternes des voitures. La surface intérieure, en métal bien poli, est engendrée par une parabole tournant autour de son axe; la lumière est placée au foyer; les rayons lumineux, après leur réflexion, devenant tous parallèles à l'axe, le réflecteur projette un faisceau de rayons parallèles qui se propagent sans se disperser et qui éclairent à une grande distance.

Corollaire II. Supposons au contraire que des rayons lumineux, parallèles à l'axe, tombent sur un miroir parabolique; après leur réflexion, ils iront tous converger au foyer.

On emploie les miroirs paraboliques dans la construction des télescopes; l'axe est dirigé vers l'astre; les rayons lumineux venant de l'astre se réfléchissent sur le miroir, et forment au foyer une image très-brillante de l'astre.

On emploie aussi la forme parabolique dans la construction des porte-voix et des cornets acoustiques.

247—Corollaire III. Réciproquement la parabole est la seule courbe qui jouisse de cette propriété que la tangente en chacun de ses points fasse des angles égaux avec la parallèle à une droite fixe et le rayon vecteur mené d'un point fixe au point de contact. Imaginons que chacun des points M du plan soit déterminé par sa distance MF au point fixe F et sa distance ME à une droite DE perpendiculaire à la droite fixe FB (fig. 136); désignons par v et u ces deux coordonnées. Quand on passe du point M de la courbe au point voisin M′, ces deux coordonnées éprouvent des accroissements $\Delta u = M'C$, $\Delta v = M'C'$, et l'on a

$$\frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{M'C'}{M'C} = \frac{M'K}{M'H}.$$

Quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, la droite M′M devient tangente et l'angle H devient droit. Les deux triangles rectangles GMH, GMK (fig. 137), limites des deux triangles GM′H, GM′K, sont égaux, comme ayant l'hypoténuse commune et l'angle GMH égal à GMK par hyppothèse. On a donc

$$\lim \frac{\Delta v}{\Delta u} = 1,$$

et en remontant à la fonction primitive $v = u + C$. En déplaçant la droite DE d'une quantité égale à la constante C, on aura $v = u$.

PROBLÈME IX.

248—*Mener une tangente par un point* M *donné sur la parabole.*

Première méthode. Soit T (fig. 139) le point où la tangente rencontre le prolongement de l'axe, ME la perpendiculaire

abaissée du point M sur la directrice. On sait que la tangente est bissectrice de l'angle FME; l'angle FTM étant égal à l'angle alterne-interne TME, et par suite à l'angle FMT, il en résulte que le triangle TFM est isocèle, et les deux côtés FM et FT égaux entre eux.

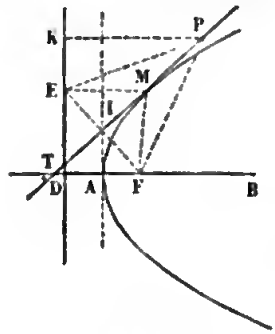


Fig. 139.

Ainsi, pour construire la tangente au point M, il suffit de porter sur l'axe une longueur FT égale au rayon vecteur FM et de joindre TM.

Cette méthode ne convient pas quand le point M est très-voisin du sommet A de la parabole, parce que les deux points M et T, étant alors très-rapprochés l'un de l'autre, ne déterminent pas la tangente avec une assez grande précision. Dans ce cas on emploiera de préférence la méthode suivante.

Deuxième méthode. La tangente MT, divisant en deux parties égales l'angle au sommet M du triangle isocèle FME, est perpendiculaire sur le milieu de la base FE.

Ainsi, pour construire la tangente, il suffit d'abaisser du point M une perpendiculaire ME sur la directrice, et de mener du point M une perpendiculaire sur la droite FE.

Il résulte de cette construction que la tangente au sommet A de la parabole est perpendiculaire à l'axe de la parabole.

Remarque. Il est bon de remarquer que tous les points de la tangente, excepté le point de contact M, sont situés à l'extérieur de la parabole. Soit P un point quelconque de la tangente; la tangente étant perpendiculaire sur le milieu de FE, les distances PF, PE sont égales; mais l'oblique PE est plus grande que la perpendiculaire PK; donc la distance PF est plus grande que PK, et par suite le point P est à l'extérieur de la parabole. Il en résulte que la parabole est une courbe convexe.

249—Corollaire. *Le lieu des projections du foyer sur la tangente à la parabole est la tangente au sommet.* On voit, en

effet, que le point I, milieu de FE et projection du foyer sur la tangente, se trouve sur la parallèle à la directrice menée par le point A, milieu de FD, c'est-à-dire sur la tangente au sommet A.

PROBLÈME X.

250—*Mener une tangente à la parabole par un point extérieur* P.

Supposons le problème résolu et soit PM (fig. 140) la tangente demandée. Si l'on abaisse du point M une perpendiculaire ME sur la directrice et si l'on joint FE, on sait que la tangente PM est perpendiculaire sur le milieu de FE; il en résulte que la distance PE est égale à PF, et l'on en déduit la construction suivante.

Du point P comme centre, avec un rayon égal à la distance PF de ce point au foyer, décrivez un cercle qui coupera la directrice au point E. Joignez FE, et du point P menez une perpendiculaire sur la droite FE, vous aurez la tangente demandée. Le point de contact M sera déterminé par l'intersection de la tangente avec une parallèle à l'axe menée par le point E.

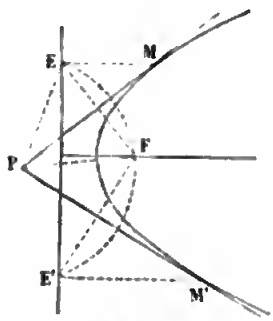


Fig. 140.

Le cercle coupe la directrice en un second point E'. On mènera de même du point P une perpendiculaire sur FE' et l'on aura une seconde tangente PM'.

Ces constructions peuvent être effectuées sans que la parabole soit tracée. Il suffit que l'on connaisse le foyer et la directrice.

PROBLÈME XI.

251—*Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée* KL.

Supposons le problème résolu et soit MT la tangente demandée (fig. 141). Si du point de contact M on abaisse une

perpendiculaire ME sur la directrice et que l'on joigne FE, on sait que la tangente est perpendiculaire sur le milieu de FE. On en déduit la construction suivante :

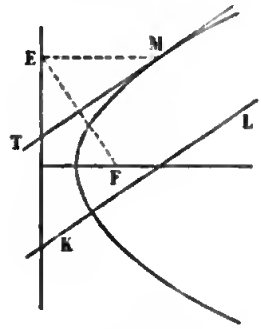


Fig. 141.

Du foyer F abaissez une perpendiculaire sur la droite donnée KL jusqu'à sa rencontre avec la directrice en E, et sur le milieu de FE élevez une perpendiculaire MT, vous aurez la tangente demandée. On déterminera le point de contact M en menant par le point E une parallèle EM à l'axe.

PROBLÈME XII.

252—*Trouver les points de rencontre d'une droite donnée et d'une parabole définie par son foyer et sa directrice.*

Prenons le point F_1 symétrique du foyer par rapport à la droite donnée (fig. 142). Le point M, étant également distant des points F, F_1 et de la directrice, est le centre d'un cercle passant par ces deux points et tangent à la directrice. Pour avoir le point de contact E, on porte sur la directrice à partir du point I une longueur IE moyenne proportionnelle entre les deux longueurs IF, IF_1.

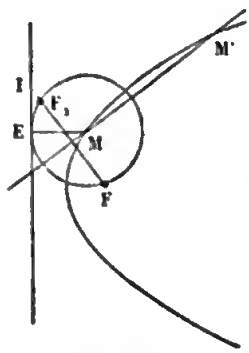


Fig.142.

THÉORÈME VII.

253—*La limite d'une ellipse ou d'une hyperbole dont le paramètre conserve une valeur finie, tandis que le grand axe ou l'axe transverse augmente indéfiniment, est une parabole.*

Nous avons vu que, dans la parabole, l'ordonnée du foyer est égale au paramètre p; par analogie on appelle *paramètre* d'une ellipse ou d'une hyperbole l'ordonnée du foyer qui est égale à $\frac{b^2}{a}$, et on désigne ce paramètre par p. L'ellipse rap-

portée à son grand axe et à la tangente au sommet, a une équation de la forme

$$y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2,$$

ou

$$y^2=2px-\frac{p}{a}x^2.$$

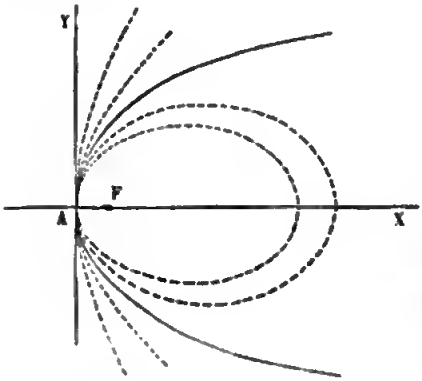


Fig. 143.

Supposons maintenant que le sommet A restant fixe, et le paramètre p conservant une valeur finie, on fasse augmenter le grand axe $2a$ indéfiniment, l'équation de l'ellipse se réduit à l'équation

$$y^2=2px,$$

qui représente une parabole. Si l'on considère les points qui correspondent à une même valeur de x, on voit que chaque point de la parabole est la position limite vers laquelle tend le point correspondant de l'ellipse, quand on fait augmenter a indéfiniment; ce qu'on énonce en disant que la parabole est la limite de l'ellipse.

L'hyperbole, rapportée à son axe transverse et à la tangente au sommet A, a de même pour équation

$$y^2=2px+\frac{p}{a}x^2;$$

si l'on fait augmenter a indéfiniment, le paramètre p, conservant une valeur finie, cette équation se réduit aussi à

$$y^2=2px.$$

La parabole est la limite de la branche d'hyperbole à laquelle appartient le sommet A; l'autre branche s'est éloignée indéfiniment vers la gauche.

Dans ce qui précède nous avons supposé que le paramètre de l'ellipse ou de l'hyperbole conserve une valeur finie. On arrive à la même conclusion, en supposant que la distance AF du sommet A au foyer voisin F conserve une valeur finie. En effet, en appelant α cette distance, on a, dans l'ellipse, $c=a-\alpha$, et par suite

$$p=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{(a-c)\,(a+c)}{a}=\alpha\left(2-\frac{\alpha}{a}\right);$$

le paramètre p ayant pour limite la quantité finie 2α, l'équation de l'ellipse se réduit à $y^2=4\alpha x$. Il en est de même pour l'hyperbole.

254—Remarque. Cette transformation de l'ellipse en parabole a une grande importance. Elle permet de déduire des propriétés de l'ellipse celles de la parabole comme cas particuliers. Ainsi nous avons vu que dans l'ellipse le diamètre, ou le lieu des milieux d'une série de cordes parallèles, est une droite passant par le centre; si l'on suppose que le centre s'éloigne à l'infini, l'ellipse se change en parabole, et les diamètres deviennent parallèles à l'axe.

L'ellipse est le lieu des points également distants du foyer F et du cercle directeur décrit du foyer F′ comme centre. Le foyer F′ s'éloignant à l'infini, le cercle directeur devient la directrice de la parabole.

La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs qui vont du point de contact M aux deux foyers; le foyer F′ s'éloignant à l'infini, le rayon vecteur MF′ devient parallèle à l'axe.

THÉORÈME VIII.

255—*Si l'on mène deux tangentes à une courbe du second degré, la droite* FP *qui va du foyer* F *au point de concours* P *des deux tangentes est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs* FM, FM′, *qui vont de ce foyer aux points de contact des deux tangentes, ou de l'angle extérieur, suivant que les deux tangentes touchent une même branche de courbe, ou deux branches différentes.*

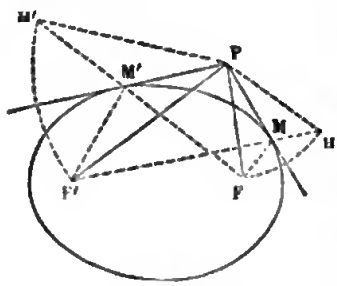


Fig. 144.

Considérons deux tangentes PM, PM′ à une ellipse (fig. 144); prolongeons le rayon F′M d'une longueur MH égale à

MF et de même FM′ d'une longueur M′H′ égale à M′F ; les tangentes étant perpendiculaires sur les milieux de FH et de F′H′, on a PH=PF et PH′=PF′, et les deux triangles F′PH, H′PF sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, savoir : F′H=FH′=2a, PH=PF, PF′=PH′; on en conclut que les angles PHM, PFM′ sont égaux ; mais l'angle PHM est égal à PFM ; donc les angles PFM, PFM′ sont égaux et la droite FP est bissectrice de l'angle MFM′.

Le même théorème a lieu dans la parabole, que l'on peut considérer comme la limite d'une ellipse, et aussi dans l'hyperbole quand les deux tangentes touchent une même branche ; mais quand les tangentes touchent deux branches différentes de l'hyperbole, il est aisé de voir que la droite FP est bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs FM, et le prolongement de l'autre.

THÉORÈME IX.

256—*Les tangentes menées d'un point extérieur* P *à une ellipse ou à une hyperbole font des angles égaux avec les droites qui joignent ces points aux deux foyers.*

Dans les mêmes triangles égaux (fig. 144), on a les angles égaux F′PH, H′PF ; en retranchant la partie commune F′PF, on a FPH=F′PH′, et, en prenant la moitié, FPM=F′PM′.

La même propriété a lieu dans la parabole en remplaçant la droite PF′ par une parallèle à l'axe.

THÉORÈME X.

257—*La droite* FK, *qui joint le foyer d'une courbe du second degré au point où une sécante quelconque rencontre la directrice, est bissectrice de l'angle extérieur des rayons vecteurs allant du foyer aux points où la sécante coupe la courbe, ou bissectrice de l'angle même des rayons vecteurs, suivant que les deux points d'intersection* M *et* M′ *sont situés sur la même branche de la courbe ou sur deux branches différentes.*

Des points M et M′ abaissons des perpendiculaires sur la directrice (fig. 145) ; on a

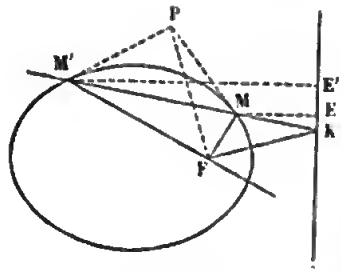


Fig. 145.

$$\frac{MF}{ME} = \frac{M'F}{M'E'},$$

et par suite

$$\frac{MF}{M'F} = \frac{ME}{M'E'} = \frac{MK}{M'K}.$$

Lorsque les deux points M et M′ appartiennent à une même branche de la courbe, le point K, étant situé sur le prolongement de la corde MM′, la droite FK est bissectrice de l'angle extérieur au triangle MFM′.

Corollaire. Si l'on mène des tangentes à la courbe aux points M et M′, et que l'on joigne le foyer F au point de concours P de ces tangentes, les deux droites FK, FP, étant bissectrices de deux angles supplémentaires, sont perpendiculaires entre elles.

THÉORÈME XI.

258—*Si par un point* P *pris sur la directrice, on mène des tangentes à une courbe du second degré, la droite des contacts* MM′ *passe par le foyer correspondant* F *et est perpendiculaire à la droite* FP *qui joint le point* P *au foyer* (fig. 146).

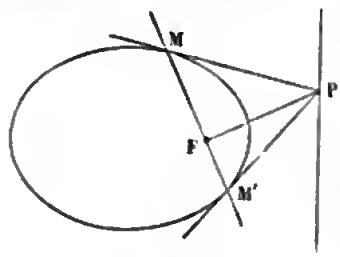


Fig. 146.

Imaginons que la tangente PM soit la limite d'une sécante dont les deux points d'intersection se sont réunis en un seul; en vertu du théorème précédent, la droite FP est perpendiculaire à FM; elle est de même perpendiculaire à FM′; donc la ligne MFM′ est droite et perpendiculaire à FP.

THÉORÈME XII.

259—*Le produit des distances des deux foyers à une tangente quelconque de l'ellipse ou de l'hyperbole est constant.*

Soient FH, F′H′ les perpendiculaires abaissées des foyers sur une première tangente; FK, F′K′ les perpendiculaires

abaissées sur une seconde tangente, P le point de rencontre des deux tangentes. En vertu du théorème IX, les triangles rectangles FPH, F'PK' sont semblables, ainsi que les triangles FPK, F'PH', et l'on a

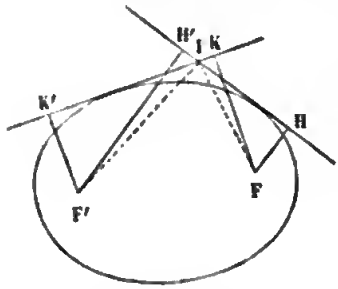


Fig. 147.

$$\frac{FH}{F'K'}=\frac{FP}{F'P}=\frac{FK}{F'H'};$$

d'où

$$FH\times F'H'=FK\times F'K'.$$

En considérant la tangente parallèle au grand axe, on voit que ce produit constant est égal à b^2.

ÉQUATION DES COURBES DU SECOND DEGRÉ EN COORDONNÉES POLAIRES.

260—Nous prendrons pour pôle un foyer F, et pour axe polaire la droite qui va de ce foyer au sommet voisin A de la courbe.

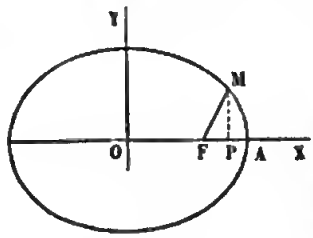


Fig 148.

Considérons d'abord une ellipse; prenons pour pôle le foyer F et pour axe polaire le grand axe dirigé vers le sommet voisin A. Nous avons trouvé (n° 218) pour expression de la distance du foyer à un point quelconque M de la courbe

$$\rho=a-\frac{c}{a}x,$$

la courbe étant rapportée à ses axes; si l'on projette la ligne brisée OFM sur le grand axe, il vient

$$x=c+\rho\cos\omega;$$

en remplaçant x par cette valeur dans l'équation précédente et désignant par e l'excentricité $\frac{c}{a}$, on en déduit

$$(1)\quad \rho=\frac{p}{1+e\cos\omega}.$$

Supposons maintenant qne la courbe soit une hyperbole.

Prenons pour pôle le foyer F′ et pour axe polaire l'axe transverse pris dans la direction F′A′. Nous avons vu (n° 233) que la distance du foyer F′ à un point quelconque de la courbe est exprimée par la formule

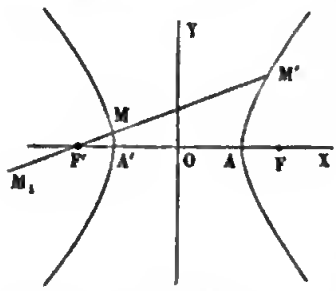


Fig. 149.

$$\rho = \pm\left(\frac{cx}{a} + a\right),$$

le signe — s'appliquant à la branche de gauche, le signe + à la branche de droite. Projetons sur l'axe transverse OX la ligne brisée OF′M, on a

$$x = -c + \rho\cos\omega.$$

Il en résulte que la première branche de l'hyperbole est représentée par l'équation

$$(1)\quad \rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega},$$

la seconde par l'équation

$$(2)\quad \rho = \frac{-p}{1 - e\cos\omega}.$$

Mais si l'on convient de porter les rayons vecteurs négatifs en sens contraire de la direction indiquée par l'angle ω, il est facile de voir que l'équation (1) représente à elle seule les deux branches de l'hyperbole. Soit M′ un point quelconque de cette seconde branche, ω' l'angle correspondant A′F′M′, ρ' le rayon vecteur F′M′; en vertu de l'équation (2), on a $\rho' = \frac{-p}{1 - e\cos\omega'}$. Dans l'équation (1), donnons à l'angle ω la valeur $\omega' + \pi$, il viendra

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega'} = -\rho';$$

on obtient ainsi pour ρ une valeur négative $-\rho'$; mais la valeur $\omega' + \pi$ attribuée à ω, indique la direction F′M₁ opposée de F′M′. Si ρ avait une valeur positive, il faudrait la porter dans la direction F′M₁; ρ ayant une valeur négative $-\rho'$, on convient de porter la valeur absolue ρ' en sens inverse, c'est-à-dire dans la direction F′M′, ce qui donne le point M′. Il résulte de là que l'équation (1) suffit pour représenter les deux branches de

l'hyperbole, la première par les valeurs positives de ρ, la seconde par les valeurs négatives.

Considérons enfin le cas où la courbe est une parabole. Prenons encore pour pôle le foyer F et pour axe polaire la droite FA dirigée vers le sommet. On a (n° 243)

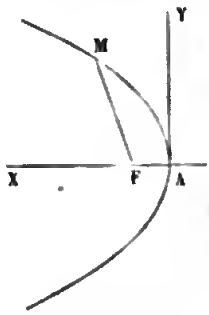


Fig. 150.

$$\rho = \frac{p}{2} + x.$$

En projetant sur l'axe AX la ligne brisée AFM, on a, comme précédemment,

$$x = \frac{p}{2} + \rho \cos(\pi - \omega) = \frac{p}{2} - \rho \cos\omega;$$

d'où l'on déduit

$$(3) \quad \rho = \frac{p}{1 + \cos\omega}.$$

Il résulte de ce qui précède que l'équation (1) représente les trois courbes du second degré; la courbe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que l'excentricité e est inférieure, égale ou supérieure à l'unité.

EXERCICES.

1° M et M' étant deux points d'une parabole, P le point de concours des tangentes en ces deux points et F le foyer, démontrer que l'on a $\frac{\overline{PM}^2}{\overline{MF}} = \frac{\overline{PM'}^2}{\overline{M'F}}$.

2° Dans une courbe du second degré, la perpendiculaire abaissée du foyer sur une corde et le diamètre conjugué de la corde se coupent sur la directrice.

3° Un demi-diamètre d'une ellipse ou d'une hyperbole est moyen proportionnel entre les droites qui joignent les foyers à l'extrémité du diamètre conjugué du premier.

22 4° Dans l'hyperbole équilatère la distance d'un point quelconque de la courbe au centre est moyenne proportionnelle entre les distances de ce point aux foyers.

5° Trouver dans le plan d'une ellipse un cercle tel que la longueur de la tangente menée au cercle de chacun des

points de l'ellipse soit une fonction rationnelle, entière et du premier degré des coordonnées de ce point.

Démontrer que la somme des tangentes menées de chacun des points de l'ellipse à deux cercles jouissant de la propriété précédente, et complétement intérieurs à l'ellipse, est constante.

6° Lieu du sommet d'un angle constant circonscrit à une parabole.

7° Par le foyer d'une parabole on mène une corde, et sur la corde comme diamètre on décrit un cercle, puis on mène au cercle des tangentes parallèles à une droite donnée; trouver le lieu des points de contact.

8° Un angle constant tourne autour du foyer d'une courbe du second degré; aux points où les côtés de l'angle rencontrent la courbe, on mène des tangentes à cette courbe; trouver le lieu du point d'intersection de ces tangentes.

9° Étant donnée une ellipse; en un point quelconque M, on mène la tangente que l'on prolonge jusqu'aux points P et Q, où elle rencontre les tangentes aux extrémités du grand axe; trouver le lieu du point de rencontre N des droites F'P et FQ, et du point de rencontre N' des droites FP et F'Q. Démontrer que les deux points N et N' sont situés sur la normale au point M.

10° On joint un point quelconque M d'une ellipse aux deux foyers; démontrer que le produit $tang\frac{F'FM}{2}\,tang\frac{FF'M}{2}$ est constant.

11° L'angle sous lequel du foyer d'une courbe du second degré on voit la portion d'une tangente mobile comprise entre deux tangentes fixes est constant.

12° Un triangle étant circonscrit à une parabole, le point de concours des hauteurs est sur la directrice, et le cercle circonscrit au triangle passe par le foyer.

13° Si en un point quelconque M d'une ellipse, on mène une normale, la portion de cette normale comprise entre le point M et le petit axe a pour projection sur les rayons vecteurs

menés du point M aux deux foyers une longueur égale au demi grand axe.

14° La portion de la normale comprise entre le point M et le grand axe a pour projection sur les rayons vecteurs une longueur égale au paramètre de l'ellipse.

15° Deux courbes du second degré ont un foyer commun; si l'on mène de ce foyer des rayons vecteurs aux extrémités d'un diamètre quelconque de l'une des courbes; la somme ou la différence des rapports de ces rayons aux rayons de la seconde courbe qui ont la même direction est constante.

16° On prolonge les rayons vecteurs qui vont d'un point quelconque M de l'ellipse aux deux foyers F et F′ jusqu'à leur rencontre en P et Q avec la courbe; démontrer que la somme $\frac{MF}{FP}+\frac{MF'}{F'Q}$ est constante.

17° Une rose des vents formée de m rayons tourne autour de son centre placé au foyer d'une ellipse; démontrer que la somme des inverses des longueurs comptées sur chaque rayon depuis le foyer jusqu'au point où il coupe l'ellipse, est constante.

18° D'un point quelconque P situé dans le plan d'une ellipse, on mène des tangentes à cette ellipse; on abaisse du point P une perpendiculaire PC sur la corde des contacts AB; les droites PC et AB coupent le petit axe en D et E; démontrer que le cercle décrit sur DE comme diamètre passe par les deux foyers.

19° Étant données deux ellipses homofocales; par un point P on mène à l'une d'elles des tangentes qui rencontrent la seconde, l'une en A et B, l'autre en C et D; démontrer que l'on a

$$\frac{1}{PA}\pm\frac{1}{PB}=\frac{1}{PC}\pm\frac{1}{PD}.$$

20° On décrit un cercle sur le grand axe d'une ellipse comme diamètre; l'ordonnée d'un point quelconque M de l'ellipse rencontre le cercle en un point N; si l'on appelle ω l'angle que fait avec le grand axe le rayon vecteur FM, et u

l'angle que fait avec le grand axe le rayon ON du cercle, on a les relations

$$\rho = a(1 - e\cos u),$$

$$\tang\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tang\frac{u}{2}.$$

En désignant par S l'aire du secteur elliptique AFM, on a aussi

$$S = \frac{ab}{2}\left(u - e\sin u\right).$$

21° Une hyperbole équilatère homofocale à une ellipse intercepte sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse deux cordes égales.

22° Un rectangle quelconque étant circonscrit à une ellipse, on joint les points de contact consécutifs, ce qui forme un parallélogramme inscrit; démontrer que deux côtés consécutifs du parallélogramme inscrit font des angles égaux avec le côté correspondant du rectangle circonscrit, et que le périmètre de ce parallélogramme est constant.

23° Soient A le sommet, F le foyer d'une parabole, $(\rho, \omega,)$, (ρ', ω'), les coordonnées de deux points M et M′ de la courbe, θ l'angle MFM′, S l'aire du secteur AFM, A celle du secteur MFM′, l la longueur de la corde MM′; démontrer les formules suivantes, employées en astronomie,

$$p = \frac{2\rho\rho'\sin^2\frac{\theta}{2}}{\rho+\rho'-2\sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2}},\quad 2\sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{(\rho+\rho')^2 - l^2},$$

$$S = \frac{1}{6}(p+\rho)\sqrt{p(2\rho-p)} = \frac{p^2}{12}\tang\frac{\omega}{2}\left(3+\tang^2\frac{\omega}{2}\right),$$

$$A = \frac{1}{3}\sqrt{\rho\rho'}\sin\frac{\theta}{2}\left[\rho+\rho'+\sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left(\rho+\rho'+\sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{2p\left(\rho+\rho'-2\sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2p}}{6}\left[\left(\frac{\rho+\rho'+l}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\rho+\rho'-l}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

CHAPITRE VIII.

Sections coniques.

THÉORÈME I.

261—*La section d'un cylindre circulaire droit par un plan quelconque oblique à la base est une ellipse.*

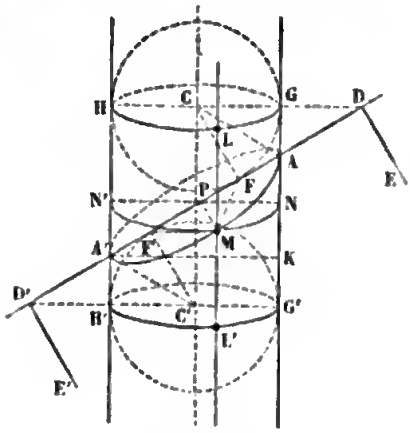


Fig. 151.

Par l'axe CC′ du cylindre (fig. 151), menons un plan perpendiculaire au plan sécant; nous prendrons ce plan pour plan de la figure. Ce plan coupe le cylindre suivant deux génératrices opposées GG′, HH′, et le plan sécant suivant la droite AA′. Dans le plan de la figure, décrivons deux cercles C et C′ tangents à la droite AA′ et aux deux génératrices GG′, HH′ du cylindre; il suffit pour cela de mener les bissectrices des angles A et A′, jusqu'à leur rencontre en C et C′ avec l'axe du cylindre; si du point C comme centre, avec le rayon du cylindre, on décrit un cercle, ce cercle touchera les génératrices en G, H, et la droite AA′ au point F; le cercle décrit du point C′ comme centre touchera de même les génératrices en G′, H′, et la droite AA′ au point F′. Imaginons maintenant que la figure tourne autour de l'axe CC′; la génératrice GG′ engendrera la surface du cylindre, tandis que les deux cercles engendreront deux sphères inscrites dans le cylindre et le touchant intérieurement, la première suivant la circonférence de grand cercle GLH, la seconde suivant la circonférence de grand cercle G′L′H′. En outre, les deux sphères sont tangentes au plan proposé, la première au point F, la seconde au point F′. En effet, le plan de la figure et le

plan proposé sont perpendiculaires entre eux ; la droite CF, qui est tracée dans le premier plan perpendiculairement à leur intersection AA′, est perpendiculaire au second plan ; le plan AMA′, étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon CF, est tangent à la sphère C au point F. On verrait de même que ce plan est tangent à la sphère C′ au point F′.

Cela posé, soit AMA′ la courbe suivant laquelle le plan sécant coupe le cylindre ; nous allons démontrer que cette courbe est une ellipse ayant pour foyers les points F et F′. Joignons un point quelconque M de cette courbe aux deux points F et F′ ; par le point M passe une génératrice LL′ du cylindre, et cette génératrice touche la sphère supérieure au point L, la sphère inférieure au point L′. Les deux droites MF, ML, tangentes menées du même point M à la sphère C, sont égales ; de même, les deux droites MF′, ML′, tangentes menées du point M à la sphère inférieure, sont égales. Ainsi la somme des rayons vecteurs MF + MF′ est égale à ML + ML′, c'est-à-dire à la portion LL′ de la génératrice comprise entre les deux cercles de contact ; longueur constante, car dans le mouvement de révolution autour de CC′, la génératrice GG′ vient coïncider avec LL′. On voit par là que la somme des distances de chacun des points de la courbe aux deux points fixes F et F′ est constante et égale à GG′ ; on en conclut que la courbe est une ellipse ayant pour foyers F et F′.

262—Corollaire. Les droites DE, D′E′, intersections du plan sécant et des plans des cercles GH, G′H′, suivant lesquels les sphères inscrites touchent le cylindre, sont les directrices de l'ellipse. En effet, par le point M menons un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, ce plan coupera le cylindre suivant un cercle NMN′. La droite DE, intersection de deux plans perpendiculaires au plan de la figure, est elle-même perpendiculaire à ce plan, et par suite à la droite AA′ ; il en est de même de la droite MP, intersection du plan du cercle et du plan sécant. Le rayon vecteur MF étant égal à ML ou à NG, et la perpendiculaire abaissée du point M sur la directrice DE étant

égale à PD, le rapport des distances du point M au foyer et à la directrice est exprimé par $\frac{NG}{PD}$; mais, à cause des parallèles PN et GD, ce rapport est égal à celui de AG à AD, rapport constant, puisque ces deux dernières longueurs sont constantes.

Au foyer F correspond la directrice DE; au foyer F′ correspond la directrice D′E′, droite d'intersection du plan sécant et du plan de contact G′H′.

THÉORÈME II.

263—*La section d'un cône circulaire droit par un plan est une courbe du second degré.*

Menons par l'axe du cône un plan perpendiculaire au plan sécant; ce plan coupe le cône suivant deux génératrices SG′, SH′, et le plan sécant suivant la droite AA′.

1° Considérons d'abord le cas où le plan sécant ne coupe qu'une nappe du cône (fig. 152). Décrivons deux cercles O et O′ tangents à la droite AA′ et aux deux arrêtes SG′, SH′. Si l'on fait tourner la figure autour de l'axe SO′, pendant que l'arête SG′ engendre le cône, les deux demi-cercles engendrent deux sphères tangentes au cône suivant les cercles de contact GH, G′H′. Le plan sécant est tangent à l'une des sphères au point F, comme perpendiculaire à l'extrémité du rayon OF; il est aussi tangent à l'autre sphère au point F′.

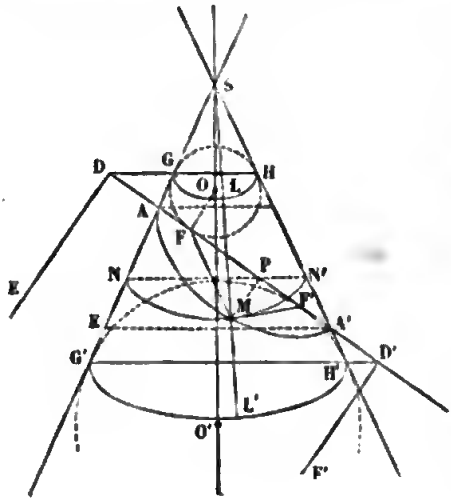


Fig. 152.

Cela posé, soit M un point quelconque de la courbe d'intersection; la génératrice SM qui passe en ce point touche les sphères aux points L, L′; je

joins MF, MF′. Les droites MF et ML sont égales comme tangentes menées du même point M à la sphère O; les droites MF′ et ML′ sont égales comme tangentes menées du point M à la sphère O′; donc

$$MF + MF' = ML + ML' = LL'.$$

Or la portion LL′ de la génératrice comprise entre les cercles parallèles GH, G′H′ est constante et égale à GG′; donc la somme des distances de chacun des points de la courbe aux deux points fixes F, F′ est constante, et par conséquent cette courbe est une ellipse dont les points F et F′ sont les foyers.

La somme constante GG′ est égale au grand axe AA′. Si par le point A′ on mène A′K parallèle à GH, on détermine sur la génératrice une portion AK égale à la distance focale FF′. Car, si des longueurs égales GG′, AA′ on retranche, d'une part AG, KG′, d'autre part les longueurs égales AF, A′F′, il reste deux longueurs égales AK, FF′.

Considérons les droites DE, D′E′, suivant lesquelles le plan sécant est coupé par les plans des cercles de contact GH, G′H′. Si du point M on abaisse une perpendiculaire MP sur le grand axe, la distance du point M à la droite DE est égale à PD. Soit NMN′ le cercle parallèle qui passe par le point M; la longueur MF ou ML est égale à GN. A cause des parallèles DG, PN, on a

$$\frac{GN}{DP} = \frac{AG}{AD} = \frac{AK}{AA'}.$$

Ainsi les distances de chacun des points de l'ellipse au foyer F et à la droite DE sont entre elles comme la distance des foyers au grand axe. Cette droite DE est une *directrice* de l'ellipse. La droite D′E′ est la seconde directrice.

2° Lorsque le plan sécant rencontre les deux nappes du cône (fig. 153), on a

$$MF' - MF = ML' - ML = LL' = GG'.$$

La différence des distances de chacun des points de la courbe aux deux points F, F′ est constante; cette courbe est une hyperbole qui a pour foyers les deux points F et F′. Les

droites d'intersection du plan sécant et des plans de contact sont de même les directrices de l'hyperbole.

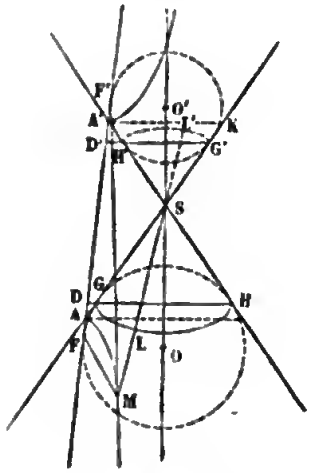


Fig. 153.

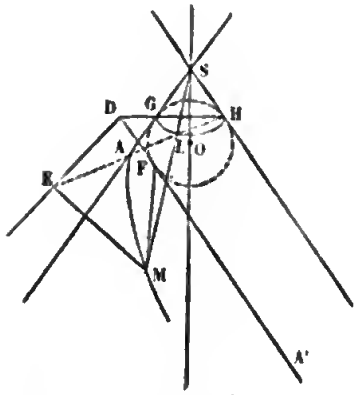


Fig. 154.

3° Supposons enfin que le plan sécant soit parallèle à une génératrice du cône, c'est-à-dire que la droite AA′ soit parallèle à l'arrête SH (fig. 152); décrivons une sphère tangente au cône suivant le cercle GH et au plan sécant en F. Soit DE l'intersection du plan sécant avec le plan du cercle de contact GH. Par le point M de la section menons la droite ME perpendiculaire à DE, et la génératrice SM, qui rencontre en L la courbe de contact; ME sera parallèle à AA′ et à SH; donc les trois droites ME, SM, SH sont dans un même plan, et les trois points H, L, E sur une même ligne droite. Les deux triangles MLE, HSL sont semblables, et puisque SL = SH on a aussi ML = ME; mais ML = MF, comme tangentes à la sphère menées du point M; par conséquent MF = ME. Ainsi chacun des points de la courbe est également distant du foyer F et de la directrice DE.

Cette méthode, si élégante pour trouver les propriétés des foyers et des directrices dans les courbes du second degré, est due à Dandelin.

264.—Placer une courbe du second degré sur un cône donné.—1° La courbe est une ellipse. Dans le triangle AA′K (fig. 152), on connaît deux côtés AA′, AK, qui sont le grand axe

et la distance des foyers, ainsi que l'angle opposé à AA′ qui est le complément de la moitié de l'angle au sommet du cône. Comme le grand axe surpasse la distance focale, on peut toujours construire ce triangle; la perpendiculaire sur le milieu de A′K détermine le point S, et par suite tout ce qui fixe la position du plan sécant.

2° La courbe est une hyperbole. Dans le triangle AA′K (fig. 153), on connaît également deux côtés, ainsi que l'angle opposé à l'un d'eux; mais comme le côté opposé à l'angle donné est le plus petit, la construction du triangle n'est pas toujours possible. Il faut que l'on ait $a > c \cos\gamma$ ($2a$ étant l'axe transverse, $2c$ la distance des foyers de l'hyperbole, 2γ l'angle au sommet du cône); d'où $\cos\gamma < \frac{a}{c} < \cos\theta$, en appelant θ l'angle de l'asymptote avec le grand axe; donc l'angle des asymptotes doit être plus petit que l'angle du cône.

3° La courbe donnée est une parabole. En joignant le centre O de la sphère au point G, on forme un triangle OGA (fig. 154), dans lequel on connaît le côté AG qui est le demi-paramètre de la parabole, et l'angle OAG complémentaire de γ. Après avoir construit ce triangle, on élèvera OS perpendiculaire sur OA jusqu'à la rencontre de AG; une fois connue la distance SA, le problème est résolu.

En résumé, sur un cône donné on peut placer toutes les ellipses, toutes les paraboles et toutes les hyperboles dans lesquelles l'angle des asymptotes est plus petit que l'angle du cône.

265—Remarque.—Supposons que les sphères employées précédemment soient toujours inscrites dans le cône, mais coupent le plan sécant; il suffit pour cela que les cercles générateurs soient tangents aux deux lignes SA, SA′ et coupent AA′; les intersections des sphères par le plan sécant sont des cercles, et l'on verra, dans le cas de l'ellipse ou de l'hyperbole, que la somme ou la différence des tangentes menées à ces cercles d'un point quelconque de la courbe est constante;

dans le cas de la parabole, la tangente menée au cercle d'un point quelconque de la courbe est égale à la distance de ce point à une certaine droite.

Les géomètres grecs connaissaient les courbes du second degré comme sections d'un cône à base circulaire par un plan. Apollonius (247 avant J.-C.) a fait sur les sections coniques un traité en huit livres, dans lequel il rapporte ce qui a été trouvé avant lui, et expose ses propres découvertes sur cette matière. Le traité d'Apollonius contient les principales propriétés des sections coniques; nous citerons les deux théorèmes sur les diamètres conjugués (nos 164, 165 et 194), les propriétés des asymptotes de l'hyperbole, les propriétés élémentaires des foyers.

CHAPITRE IX.

Conditions nécessaires pour la détermination d'une courbe du second degré.

266—L'équation générale du second degré

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

contient six coefficients; mais, comme on peut diviser tous les termes par l'un des coefficients, pourvu que ce coefficient soit différent de zéro, on voit que l'équation ne renferme que cinq paramètres arbitraires, savoir les rapports de cinq coefficients au sixième. Pour déterminer une courbe du second degré, il faut donner les valeurs des cinq paramètres, ou bien cinq relations entre ces cinq paramètres; mais, dans ce cas, il est nécessaire d'examiner si les cinq équations de condition admettent un système de solutions réelles, et si en outre l'équation du second degré correspondante représente bien une courbe; autant les cinq équations de condition admettront de systèmes de solutions réelles jouissant de cette propriété, autant il y aura de courbes du second degré satisfaisant aux conditions proposées.

En général, les relations entre les paramètres proviennent de conditions géométriques auxquelles doit satisfaire la courbe. Ainsi on peut assujettir la courbe à passer par des points donnés, à être tangente à des droites données, etc. On exprimera que la courbe passe par un point donné, en écrivant que les coordonnées du point vérifient l'équation de la courbe, ce qui donne une relation entre les coefficients. On exprimera que la courbe est tangente à une droite donnée, en écrivant que l'équation qui fournit les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite a deux racines égales, ce qui donne aussi une relation entre les coefficients. Une condition géométrique qui se traduit par une relation entre les coefficients est regardée comme une condition simple. Une condition géométrique qui se traduirait par deux relations serait regardée comme double; si, par exemple, on assujettissait la courbe à toucher une droite donnée en un point donné, l'équation qui donnerait les abscisses des points d'intersection devant admettre une racine double donnée, il en résulterait deux relations entre les coefficients; la condition géométrique énoncée devrait donc compter comme deux conditions simples. D'après cela, on dira qu'il faut *cinq* conditions géométriques pour déterminer une courbe du second degré. Mais, comme nous l'avons déjà fait observer, il sera nécessaire d'examiner si les cinq équations admettent un système de solutions réelles.

267—Supposons que l'on assujettisse la courbe du second degré à passer par cinq points donnés. En désignant par x', y' les coordonnées de l'un des points, on aura cinq relations de la forme

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+Dx'+Ey'+F=0,$$

entre les rapports de cinq des coefficients au sixième. Ces équations, étant du premier degré, admettent en général un système de solutions réelles et finies et un seul; cependant il faut examiner s'il n'y a pas d'exception. Pour faciliter la discussion, nous choisirons d'une manière particulière les axes des coordonnées.

Considérons d'abord le cas où, parmi les cinq points donnés, trois ne sont pas en ligne droite. Soient A, B, C, D, E les cinq points donnés; prenons pour axes des coordonnées les deux droites AB, CD, qui se rencontrent en O. Appelons x' et x'' les abscisses des points A et B, y' et y'' les ordonnées des points C et D, x_1 et y_1 les coordonnées du point E. Soit

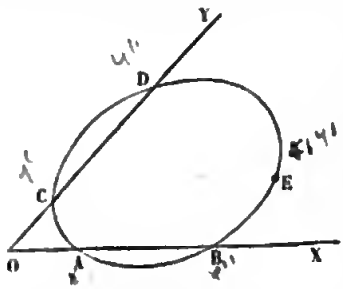


Fig. 155.

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

l'équation d'une courbe du second degré. Cette courbe passera par les points A et B, si l'équation

$$Ax^2+Dx+F=0,$$

à laquelle se réduit l'équation proposée, quand on fait $y=0$, admet pour racines x' et x''; pour cela il est nécessaire et il suffit que les coefficients de l'équation satisfassent aux relations

$$-\frac{D}{A}=x'+x'', \quad \frac{F}{A}=x'x'',$$

ou

$$A=\frac{F}{x'x''}, \quad D=-F\left(\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}\right).$$

De même la courbe passera par les points C et D, si l'équation

$$Cy^2+Ey+F=0,$$

que l'on obtient en faisant $x=0$, admet pour racines y' et y''; pour cela il est nécessaire et il suffit que les coefficients satisfassent aux relations

$$-\frac{E}{C}=y'+y'', \quad \frac{F}{C}=y'y'',$$

ou

$$C=\frac{F}{y'y''}, \quad E=-F\left(\frac{1}{y'}+\frac{1}{y''}\right).$$

Si l'on remplace les coefficients A, D, C, E par les valeurs trouvées, et si l'on divise tous les termes par F, l'équation de la courbe s'écrit

$$(2)\quad \frac{x^2}{x'x''}+\frac{B}{F}xy+\frac{y^2}{y'y''}-\left(\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}\right)x-\left(\frac{1}{y'}+\frac{1}{y''}\right)y+1=0.$$

On peut la mettre sous la forme

$$(3)\quad \left(\frac{x}{x'}+\frac{y}{y'}-1\right)\left(\frac{x}{x''}+\frac{y}{y''}-1\right)+\alpha xy=0,$$

en posant $\alpha=\frac{B}{F}-\frac{1}{x'y''}-\frac{1}{y'x''}$. Quelle que soit la valeur du paramètre α, l'équation (3) représente une courbe du second degré qui passe par les quatre points A, B, C, D.

La courbe passera par le cinquième point E, si les coordonnées x_1, y_1 de ce point satisfont à l'équation (3), ce qui donne une relation qui détermine la valeur de α. Si l'on attribue à α la valeur ainsi déterminée, l'équation (3) représentera une courbe passant par les cinq points donnés A, B, C, D, E.

Puisqu'on obtient un seul système de valeurs pour les coefficients, il n'y a qu'une seule courbe du second degré qui passe par les cinq points donnés.

Ainsi, *par cinq points donnés, dont trois ne sont pas en ligne droite, passe toujours une courbe du second degré et une seule.*

268—Lorsque, parmi les cinq points donnés, trois, C, D, E, sont en ligne droite, on peut encore faire passer par ces cinq points, un lieu du second degré; ce lieu se compose du système de deux droites CDE, AB. Il n'y en a pas d'autre que celui-là. Nous savons, en effet (n° 58), que, lorsqu'une droite a trois points communs avec un lieu du second degré, elle appartient tout entière au lieu. Le premier membre de l'équation du second degré se décomposera en un produit de deux facteurs du premier degré; les deux équations, que l'on obtient en égalant séparément chacun de ces facteurs à zéro, représentent les deux droites.

Lorsque parmi les cinq points donnés, quatre sont en ligne droite, il y a indétermination. Le lieu se composera de la droite, à laquelle appartiennent les quatre premiers points, et d'une droite quelconque passant par le cinquième point.

L'équation du second degré renfermera un paramètre arbitraire.

Enfin, si les cinq points donnés étaient en ligne droite, l'indétermination serait encore plus grande ; le lieu, formé de cette droite et d'une autre droite quelconque, dépendrait de deux paramètres arbitraires.

L'équation (2), dans laquelle le paramètre $\frac{B}{F}$ est arbitraire, représente toutes les courbes du second degré qui passent par les quatre points A, B, C, D. Ces quatre points suffisent pour déterminer une parabole ; car la condition $\left(\frac{B}{F}\right)^2 - \frac{4}{x'x''y'y''} = 0$ donnera le paramètre $\frac{B}{F}$. Si le produit $x'x''y'y''$ a une valeur positive, on aura deux paraboles passant par les quatre points donnés ; mais, si le produit avait une valeur négative, il serait impossible de faire passer une parabole par les quatre points.

ÉQUATION GÉNÉRALE DES COURBES DU SECOND DEGRÉ PASSANT PAR QUATRE POINTS DONNÉS.

269—L'équation (3), qui renferme un paramètre arbitraire α, représente toutes les courbes du second degré qui passent par les quatre points donnés A, B, C, D, quand on prend pour axe des coordonnées deux côtés opposés du quadrilatère inscrit ABCD (fig. 156). En général soient $A=0$, $A'=0$ les équations de deux côtés opposés AB, CD du quadrilatère, $B=0$, $B'=0$ celles des autres côtés BC, DA, il est aisé de voir que l'équation

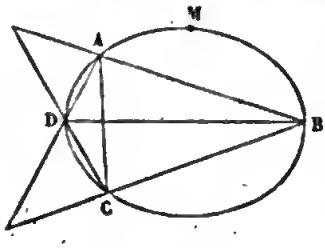


Fig. 156.

$$(4) \quad AA' + \alpha BB' = 0,$$

dans laquelle α désigne un paramètre arbitraire, représente toutes les courbes du second degré qui passent par les quatre points donnés. En effet, quelle que soit la valeur attribuée à α, on reconnaît d'abord que la courbe passe par les quatre points ;

car les coordonnées du point B, par exemple, annulant à la fois facteurs A et B, vérifient l'équation. D'un autre côté, cette équation représente toutes les courbes du second degré qui passent par les quatre points donnés; car un cinquième point définit la courbe, et l'on peut toujours déterminer le paramètre α de manière que la courbe passe par ce cinquième point.

Il est à remarquer que, parmi les lignes du second degré qui passent par les quatre points donnés, se trouvent trois couples de droites, savoir: le couple des droites AB, CD, le couple BC, DA, et enfin le couple AC, BD.

Les polynômes du premier degré A, A′, B, B′ désignent, à des facteurs constants près, les distances du point M qui a pour coordonnées x et y, aux quatre côtés du quadrilatère, distances que nous appelerons p, p', q, q', de sorte que l'équation (4) peut être mise sous la forme

$$\frac{pp'}{qq'}=k,$$

k étant un rapport constant. Il en résulte ce théorème : *le produit des distances d'un point quelconque d'une courbe du second degré à deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit est au produit des distances aux deux autres côtés dans un rapport constant.* En faisant varier le rapport k, on obtient toutes les courbes du second degré circonscrites au quadrilatère ABCD.

COURBES DU SECOND DEGRÉ INSCRITES DANS UN ANGLE DONNÉ.

270—Supposons que l'on assujettisse une courbe du second degré à toucher deux droites données OA, OB en deux points donnés A et B, et à passer par un point M, ce qui fait cinq conditions géométriques; le calcul du n° 267 pourra s'appliquer à ce cas; si l'on prend les deux droites OA, OB pour axes des coordonnées, que l'on appelle x' l'abscisse du point A, y' l'ordonnée du point B, et que l'on fasse ensuite $y=0$ ou $x=0$ dans l'équation générale

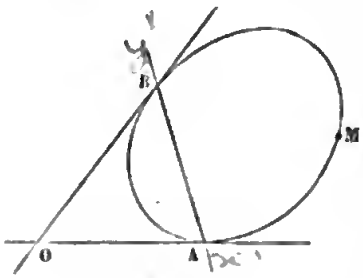


Fig. 157.

du second degré, il suffit d'écrire que l'équation admet la racine double $x = x'$ ou $y = y'$; l'équation générale des courbes du second degré tangentes aux deux droites données en A et B, pourra se mettre sous la forme

$$\left(\frac{x}{x'}+\frac{y}{y'}-1\right)^2+\alpha xy=0.$$

On déterminera ensuite le paramètre α par la condition que la courbe passe par le point M.

Ainsi, *il existe une courbe du second degré et une seule tangente à deux droites données en deux points donnés, et passant par un point donné.*

271—Cela posé, supposons que les axes des coordonnées aient une position quelconque dans le plan; désignons par $A=0$, $A'=0$ les équations des deux tangentes OA, OB, et par $B=0$ l'équation de la corde des contacts AB; l'équation

$$(5) \quad AA' + \alpha B^2 = 0,$$

dans laquelle α est un paramètre arbitraire, représentera toutes les courbes du second degré tangentes aux deux droites données en deux points donnés. En effet, si l'on cherche les points communs à la courbe et à la droite $A = 0$, l'équation (5) se réduit à $B = 0$, ce qui donne un seul point A; ainsi la courbe est tangente à la droite OA au point A; elle est de même tangente à la droite OB au point B. D'un autre côté, l'équation (5) représente toutes les courbes du second degré tangentes à ces deux droites aux points A et B; car on peut déterminer le paramètre α par la condition que la courbe passe par le point M.

Si l'on appelle p et p' les distances d'un point quelconque M de la courbe aux deux tangentes, q la distance à la corde des contacts AB, l'équation (5) peut se mettre sous la forme

$$\frac{pp'}{q^2}=k.$$

Il en résulte ce théorème : *le rapport du produit des distances d'un point quelconque d'une courbe du second degré à deux*

tangentes au carré de la distance de ce point à la corde des contacts, est constant.

ÉQUATION GÉNÉRALE DES COURBES DU SECOND DEGRÉ PASSANT PAR TROIS POINTS DONNÉS.

272—Soient $A=0$, $B=0$, $C=0$ les équations des côtés *bc*, *ca*, *ab* du triangle *abc*; toutes les courbes du second degré qui passent par les trois points *a*, *b*, *c*, seront représentées par l'équation

$$(6)\quad \alpha BC + \beta CA + \gamma AB = 0,$$

ou

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0,$$

qui renferme deux paramètres arbitraires, savoir les rapports de deux des trois coefficients α, β, γ au troisième. On voit d'abord que toute courbe représentée par l'équation (6) passe par les trois points *a*, *b*, *c*; d'autre part, on peut déterminer les deux paramètres de manière à assujettir la courbe à passer en outre par deux points pris à volonté dans le plan.

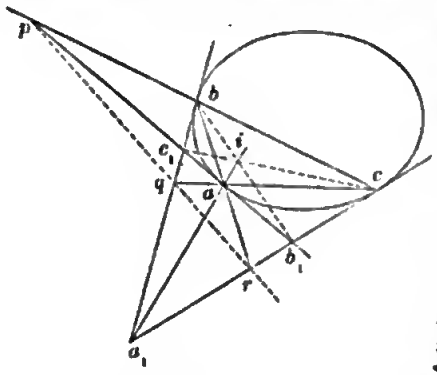


Fig. 158.

273—Cherchons l'équation de la tangente au point *a*; toute droite passant en ce point a une équation de la forme $C + \lambda B = 0$. Les points d'intersection de cette droite et de la courbe sont donnés par le système des deux équations $C + \lambda B = 0$, $B[\lambda\alpha B + (\lambda\beta - \gamma)A] = 0$, qui se décompose en deux; l'un $B = 0$, $C = 0$ fournit le point *a*; pour que l'autre système fournisse aussi le point *a*, il faut que l'on ait $\lambda = \frac{\gamma}{\beta}$; ainsi la tangente au point *a* a pour équation

$$\frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} = 0.$$

De même les tangentes en b et c ont pour équations

$$\frac{C}{\gamma}+\frac{A}{\alpha}=0,$$

$$\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}=0.$$

Les points d'intersection p, q, r des tangentes avec les côtés opposés sont donnés par les trois systèmes d'équations

$$A=0,\quad \frac{B}{\beta}+\frac{C}{\gamma}=0,$$

$$B=0,\quad \frac{C}{\gamma}+\frac{A}{\alpha}=0,$$

$$C=0,\quad \frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}=0;$$

on voit que ces trois points sont situés sur la même droite

$$\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}+\frac{C}{\gamma}=0.$$

Les trois tangentes forment un triangle circonscrit $a_1b_1c_1$. Le point a_1, intersection des tangentes en b et c, est défini par les équations de ces deux tangentes; en les retranchant membre à membre, on a une nouvelle droite

$$\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma},$$

passant par le point a_1; mais cette droite passe aussi par le point a; c'est la droite aa_1. De même les droites bb_1, cc_1 ont pour équations

$$\frac{C}{\gamma}=\frac{A}{\alpha},$$

$$\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}.$$

On voit que ces trois droites passent par un même point i, représenté par les équations

$$\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma}.$$

CONDITIONS MULTIPLES.

274—Reprenons l'examen des conditions géométriques

par lesquelles on peut définir une courbe du second degré. Jusqu'ici nous n'avons parlé que des conditions simples, comme les points et les tangentes. Le centre équivaut à deux conditions; car si l'on prend le centre pour origine des coordonnées, l'équation du second degré, étant privée des termes du premier degré, ne contient plus que trois paramètres arbitraires; ainsi la courbe est définie par son centre et trois points.

Un diamètre avec la direction des cordes équivaut à deux conditions; car si l'on prend le diamètre pour axe des x et une parallèle aux cordes pour axe des y, l'équation, étant privée des deux termes du premier degré en y, ne contient plus que trois paramètres arbitraires.

Un système de diamètres conjugués équivaut à trois conditions; car, si on les prend pour axes des coordonnées, l'équation, devant se réduire à la forme $ax^2+by^2+c=0$, ne contient plus que deux paramètres arbitraires. En général, soient $A=0$, $B=0$, les équations de deux diamètres conjugués, les polynômes A et B étant proportionnels aux distances de chaque point aux deux diamètres conjugués et par conséquent aux coordonnées de ce point, relatives à ces diamètres, la courbe sera représentée par une équation de la forme

$$(7)\quad \alpha A^2+\beta B^2+\gamma=0,$$

avec deux paramètres arbitraires.

L'équation

$$A^2+\alpha B=0,$$

est l'équation générale des paraboles dont la droite $A=0$ est un diamètre, et la droite $B=0$ la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

On sait que l'équation de l'hyperbole, rapportée à ses deux asymptotes, est de la forme $xy=\alpha$. En général, soient $A=0$, $B=0$, les équations des deux asymptotes, l'hyperbole sera représentée par une équation de la forme

$$(8)\quad AB=\alpha,$$

ne renfermant qu'un paramètre arbitraire α. Ainsi les deux

asymptotes équivalent à quatre conditions, et la courbe est déterminée par les deux asymptotes et un point ou une tangente. Si l'on ne donnait qu'une asymptote $A=0$, l'équation $B=0$ de l'autre asymptote étant indéterminée, l'équation (8) contiendrait trois paramètres arbitraires, de sorte qu'une asymptote équivaut à deux conditions.

Nous avons vu que toute courbe du second degré a un foyer et une directrice ; il en résulte que l'équation

$$(9) \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(mx+ny+p)^2,$$

par laquelle on exprime la propriété du foyer et qui renferme les cinq paramètres arbitraires α, β, m, n, p, représente toutes les courbes du second degré. Un foyer équivaut à deux conditions ; car si l'on donne un foyer, ses coordonnées α et β étant connues, l'équation (9) ne contient plus que trois paramètres arbitraires. De même une directrice équivaut à deux conditions ; car, en donnant l'équation de la directrice, on détermine les rapports de deux des paramètres m, n, p au troisième.

La perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice a pour équation

$$(10) \quad \frac{x-\alpha}{m}=\frac{y-\beta}{n};$$

c'est un des axes de la courbe. Un sommet situé cet axe équivaut à deux conditions ; on écrira que les deux coordonnées du sommet vérifient les équations (9) et (10).

275—On peut se rendre compte d'une autre manière des résultats que nous venons d'obtenir. Il est clair que les deux coordonnées d'un point remarquable d'une courbe du second degré, comme le centre, un foyer, un sommet, etc., peuvent être exprimées à l'aide des coefficients de l'équation générale du second degré ; si donc on donne un pareil point, on aura deux relations entre les coefficients. De même, les deux coefficients de l'équation d'une droite remarquable, comme la directrice ou un axe, etc., peuvent être exprimés à l'aide des

coefficients de l'équation du second degré ; si cette droite est donnée, on aura encore deux relations entre les coefficients.

CONSTRUIRE UNE COURBE DU SECOND DEGRÉ, CONNAISSANT LE FOYER ET TROIS POINTS.

276—Pour montrer une application de ce qui précède, proposons-nous de construire une courbe du second degré, connaissant un foyer F et trois points A, B, C (fig. 159). Le problème admet plusieurs solutions. Supposons le problème résolu et les trois points appartenant à une même branche ; le point D où la sécante AB est coupée par la bissectrice de l'angle extérieur au triangle AFB appartient à la directrice (n° 257) ; la sécante BC donnera de même un second point D′ de la directrice. Le foyer F, la directrice DD′ et le point A définissent une courbe du second degré et une seule ; ce sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que la distance AF sera inférieure, égale ou supérieure à la distance AE du point A à la directrice. Il est facile de voir que cette courbe passera par les deux points B et C ; en effet, à cause de la bissectrice FD, on a

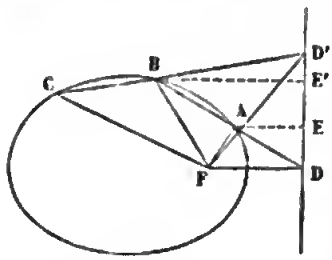


Fig. 159.

$$\frac{AF}{BF}=\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{BE'},$$

et par suite

$$\frac{AF}{AE}=\frac{BF}{BE'};$$

donc la courbe passe par le point B. On démontrera de même qu'elle passe par le point C. On a ainsi une première solution.

On peut supposer que les trois points ne sont pas sur une même branche ; si, par exemple, les deux points A et B sont sur une même branche et le point C sur l'autre branche de l'hyperbole, les bissectrices des angles AFC, BFC donneront deux points de la directrice. Les trois solutions obtenues de cette manière sont des hyperboles. On a donc en tout quatre solu-

tions; des quatre courbes du second degré qui admettent le foyer donné et passent par les trois points donnés, trois sont toujours des hyperboles, la quatrième est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant la disposition des points.

277—Le calcul conduit à la même conséquence, si l'on appelle α et β les coordonnées du foyer, x', y'; x'', y''; x''', y''', les coordonnées des trois points donnés, δ', δ'', δ''' leurs distances au foyer, et que l'on représente par l'équation (9) la courbe cherchée, on aura pour déterminer les trois paramètres m, n, p, les trois équations de condition

$$\delta' = \pm (mx' + ny' + p),$$
$$\delta'' = \pm (mx'' + ny'' + p),$$
$$\delta''' = \pm (mx''' + ny''' + p),$$

du premier degré. Chaque combinaison de signes donne un système d'équation ; il y a huit combinaisons; mais on remarque que, si l'on change les signes dans les trois équations, les valeurs de m, n, p changent de signes, et la courbe reste la même; on a donc quatre solutions. En vertu des remarques faites aux nos 218, 233 et 243, quand on prend le même signe, cela signifie que les trois points appartiennent à une même branche; quand on prend des signes différents, cela signifie que les points appartiennent à des branches différentes.

CONSTRUIRE UNE COURBE DU SECOND DEGRÉ CONNAISSANT UN FOYER ET TROIS TANGENTES.

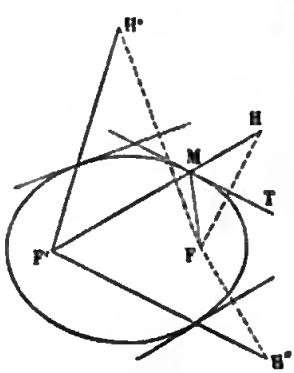


Fig. 160.

278—Supposons le problème résolu; si du foyer F on abaisse des perpendiculaires sur les trois tangentes, et qu'on prolonge chacune d'elles d'une longueur égale à elle-même on obtient trois points H, H', H'', appartenant au cercle directeur (fig. 160), qui a pour centre le second foyer F', le rayon F'H de ce cercle est égal à l'axe $2a$ qui passe par les deux foyers. Les deux foyers F, F' avec la lon-

gueur $2a$ définissent une courbe du second degré et une seule. Il est aisé de voir que cette courbe est tangente aux trois droites données; en effet, soit M le point où le rayon F'H coupe la droite MT, la somme ou la différence des rayons vecteurs MF' et MF étant égale à F'H ou à $2a$, le point M appartient à la courbe; en outre, la droite MT, étant perpendiculaire sur le milieu de FH, est tangente à la courbe au point M; le problème admet ainsi une solution et une seule.

Si les trois points H, H', H''' étaient en ligne droite, la courbe cherchée serait une parabole ayant pour directrice cette droite.

POINTS ET DROITES IMAGINAIRES.

279—Un système de valeurs réelles de x et de y détermine un point du plan; par analogie, nous appellerons *point imaginaire* un système de valeurs imaginaires attribuées à x et y. Si deux systèmes de valeurs imaginaires sont de la forme $x=\alpha+\beta i$, $y=\gamma+\delta i$, $x=\alpha-\beta i$, $y=\gamma-\delta i$, nous dirons que les deux points imaginaires sont conjugués.

Une équation du premier degré $Ax+By+C=0$ à coefficients réels est vérifiée par les coordonnées d'une infinité de points réels, dont le lieu est une ligne droite; mais elle est vérifiée aussi par une infinité de systèmes de valeurs imaginaires attribuées à x et à y; car, si l'on attribue à x une valeur imaginaire quelconque, on en déduira pour y une valeur imaginaire correspondante. Si l'on attribue à x deux valeurs imaginaires conjuguées, les deux valeurs de y seront aussi conjuguées.

Par analogie, nous appellerons *droite imaginaire* une équation du premier degré à coefficients imaginaires. Il est à remarquer qu'une droite imaginaire passe par un point réel; Soit, en effet,

$$(A'+A''i)x+(B'+B''i)y+(C'+C''i)=0,$$

ou

$$(A'x+B'y+C')+i(A''x+B''y+C'')=0,$$

une droite imaginaire. Cette équation sera vérifiée par les coordonnées du point d'intersection des deux droites réelles

$$A'x + B'y + C' = 0,$$
$$A''x + B''y + C'' = 0.$$

L'équation générale du premier degré, renfermant trois coefficients, et par suite deux paramètres arbitraires, deux points, réels ou imaginaires, détermineront la droite. Si l'on appelle x', y', x'', y'', les coordonnées des deux points donnés, la droite qui passe par ces deux points aura pour équation

$$\frac{x''-x'}{x''-x'} = \frac{y-y'}{y''-y'}.$$

La droite, qui passe par deux points imaginaires conjugués, est réelle. Soient, en effet, $x' = \alpha + \beta i$, $y' = \gamma + \delta i$, $x'' = \alpha - \beta i$, $y'' = \gamma - \delta i$; l'équation de la droite se réduit à

$$\frac{x-\alpha}{\beta} = \frac{y-\gamma}{\delta}.$$

Le point qui a pour coordonnées

$$x_1 = \frac{x' + x''}{2}, \quad y_1 = \frac{y' + y''}{2},$$

sera dit le milieu de la droite qui joint les deux points donnés; si les deux points sont imaginaires conjugués, le milieu sera un point réel.

280—Deux équations, l'une du premier degré, l'autre du second degré en x et y, admettent deux systèmes de solutions. On dira donc qu'une droite rencontre une courbe du second degré en deux points réels ou imaginaires. Une droite réelle rencontre une courbe du second degré réelle en deux points, réels ou imaginaires conjugués. Ceci permet d'expliquer un fait qui s'est présenté déjà plusieurs fois; quand on cherche, par exemple, le lieu des milieux d'une série de cordes parallèles dans l'ellipse, on trouve par le calcul une droite indéfinie, et cependant le lieu, tel qu'il est défini géométriquement, ne se compose que de la partie du diamètre intérieure à l'ellipse; les sécantes extérieures rencontrent l'ellipse en deux points imaginaires conjugués, le milieu de la corde est encore un point réel, et le diamètre se prolonge ainsi en dehors de la courbe.

281—Nous avons démontré que cinq points réels déterminent une courbe du second degré; la même mode de démonstration s'applique quand, parmi ces points, se trouvent des points imaginaires conjugués. Supposons, par exemple, que les deux points A et B soient imaginaires conjugués, ainsi que les deux points C et D; on prendra pour axes des coordonnées les deux droites réelles AB et CD; l'équation

$$\left(\frac{x}{x'}+\frac{y}{y'}-1\right)\left(\frac{x}{x''}+\frac{y}{y''}-1\right)+\alpha xy=0$$

représentera toutes les courbes du second degré qui passent par les quatre points A, B, C, D; un cinquième point E, réel ou imaginaire, déterminera le paramètre α.

INTERSECTION DE DEUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

282—Soient $P=0$, $Q=0$ les équations de deux courbes du second degré; si l'on élimine y^2 entre ces deux équations, on a une équation du premier degré en y, de la forme

$$(qx+r)y=mx^2+nx+p;$$

en portant cette valeur de y dans l'une des deux équations proposées, on obtient une équation du quatrième degré en x; à chaque valeur de x correspond une valeur de y. On en conclut que *deux courbes réelles du second degré se coupent en quatre points réels ou imaginaires et conjugués deux à deux.*

L'équation

$$P+\lambda Q=0,$$

dans laquelle λ est un paramètre arbitraire, représente toutes les courbes du second degré qui passent par les quatre points communs aux deux courbes proposées; car on peut déterminer le paramètre α de manière que la courbe passe par un cinquième point pris à volonté.

Parmi ces courbes se trouvent trois couples de droites, et il est à remarquer que l'un des couples est toujours formé de deux droites réelles. En effet, si les deux courbes se coupent en quatre points réels A, B, C, D, les trois couples AB et CD, BC et AD, AC et BD, sont formés de droites réelles. Lorsque les deux courbes se coupent en deux points réels A et B, et en

deux points imaginaires conjugués C et D, le couple AB, CD est formé de droites réelles; les quatre autres droites sont imaginaires; car si la droite AC, par exemple, était réelle, elle couperait la droite réelle CD en un point réel C, ce qui est contraire à l'hypothèse. Enfin, lorsque les deux points A et B sont imaginaires conjugués, ainsi que les deux points C et D, le couple AB, CD est encore formé de deux droites réelles.

Il résulte de ce qui précède que *deux courbes réelles du second degré admettent au moins deux sécantes communes réelles.*

283—Pour donner une application de ce qui précède, considérons, par exemple, deux ellipses ayant un foyer commun. Ces deux ellipses ne peuvent se couper en plus de deux points réels; car, d'après ce que nous avons dit au nº 275, deux ellipses, qui ont un foyer commun et trois points communs, coïncident; elles admettent donc deux sécantes communes réelles.

Soient

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(mx+ny+p)^2,$$
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)=(m'x+n'y+p')^2$$

les équations des deux ellipses; les deux sécantes communes réelles ont pour équations

$$mx+ny+p=\pm(m'x+n'y+p);$$

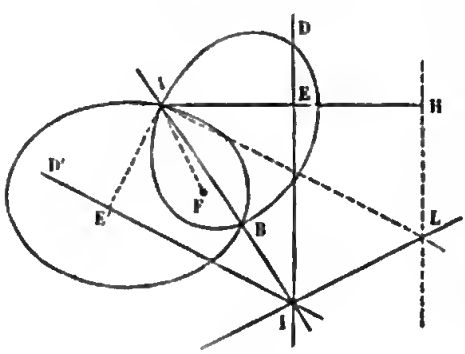


Fig. 161.

elles passent par le point d'intersection I des directrices DI, D'I (fig. 161). Si l'on appelle δ et δ' les distances d'un point quelconque de ces sécantes aux directrices, on a, en vertu de l'équation précédente,

$$\frac{\delta}{\delta'}=\frac{\sqrt{m'^2+n'^2}}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Cette propriété géométrique permet de déterminer un second point de chacune des sécantes communes, et par suite de construire ces

droites. Supposons que les deux ellipses se coupent en deux points réels A et B; l'une des sécantes communes réelles est la droite AB qui passe par ces deux points; l'autre IL ne rencontre pas les courbes. Pour déterminer cette seconde droite, joignons le point A au foyer F et abaissons de ce point des perpendiculaires AE, AE′ sur les directrices, on a $\sqrt{m^2+n^2}=\frac{AF}{AE}$, $\sqrt{m'^2+n'^2}=\frac{AF}{AE'}$, et par suite $\frac{\delta}{\delta'}=\frac{AE}{AE'}$. Prolongeons la perpendiculaire AE d'une longueur EH égale à elle-même; par le point H menons une parallèle HL à la première directrice, et par le point A une parallèle AL à la seconde directrice; le point d'intersection L de ces deux parallèles appartiendra à la seconde sécante commune réelle IL.

284—La recherche des points d'intersection de deux courbes du second degré dépend en général de la résolution d'une équation du quatrième degré; mais on peut ramener la question à la résolution d'une équation du troisième degré. L'équation $P+\lambda Q=0$, dans laquelle le paramètre λ est arbitraire, représentant toutes les lignes du second degré qui passent par les points communs aux deux premières, on peut déterminer le paramètre λ de manière que cette équation représente deux droites; les deux courbes admettent trois couples de sécantes communes, la valeur de λ sera donnée par une équation du troisième degré.

Soient

$$(1)\quad ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$
$$(2)\quad a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f'=0,$$

les équations des deux courbes proposées. L'équation $P+\lambda Q=0$ sera

$$(3)\quad (a+\lambda a')x^2+(b+\lambda b')xy+(c+\lambda c')y^2+\ldots=0.$$

Pour abréger, nous la représenterons par

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

En la résolvant par rapport à y, on a

$$y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BE-2CD)x+(E^2-4CF)}.$$

Pour que cette équation représente deux droites, réelles ou imaginaires, il est nécessaire que le polynôme placé sous le radical soit un carré parfait, ce qui exige que la condition

$$(BE-2CD)^2-(B^2-4AC)(E^2-4CF)=0$$

soit remplie. Cette relation, après la suppression du facteur 4C, s'écrit

$$(4)\quad AE^2+CD^2-BDE+(B^2-4AC)F=0;$$

si l'on remplace les lettres A, B,. .. par leurs valeurs $a+\lambda a'$, $b+\lambda b'$,.... on arrive à une équation du troisième degré en λ. Il suffira de calculer l'une des racines de cette équation avec une certaine approximation, pour avoir un couple de sécantes communes; cherchant ensuite les points d'intersection de chacune de ces droites et de l'une des courbes proposées, à l'aide d'une équation du second degré, on obtiendra les coordonnées des quatre points d'intersection.

On pourrait aussi calculer deux racines de l'équation (4), afin d'avoir deux couples de droites, dont on chercherait ensuite les points d'intersection.

Une racine réelle donnera un couple de droites réelles, si elle rend positive la quantité B^2-4AC. Il y a plusieurs cas à considérer : 1° Si l'équation du troisième degré en λ a ses trois racines réelles, et si pour deux de ces racines la quantité B^2-4AC est positive, ces deux racines donneront deux couples d'équations du premier degré à coefficients réels, d'où l'on déduira quatre solutions réelles; les deux courbes du second degré se coupent en quatre points réels et admettent en effet trois couples de sécantes réelles communes. La troisième racine rendra aussi positive la quantité B^2-4AC; 2° Si l'équation du troisième degré n'a qu'une racine réelle, ou si, l'équation ayant ses trois racines réelles, une seule rend positive la quantité B^2-4AC, les deux courbes du second degré admettent un seul couple de sécantes réelles communes; dans ce cas, elles se coupent en deux points réels ou ne se rencontrent pas; les deux équations proposées auront, ou deux solutions réelles et deux imaginaires, ou quatre solutions imaginaires.

EXEMPLES.

285—Soient les deux équations

$$x^2+y^2-10=0,$$
$$xy-y-1=0,$$

qui représentent, la première un cercle, la seconde une hyperbole.

L'équation du troisième degré

$$\lambda^3+9\lambda^2-4\lambda-40=0,$$

à laquelle on arrive, a ses trois racines réelles et comprises, l'une entre 2 et 3, l'autre entre—2 et —3, la troisième entre —8 et —9; d'ailleurs la quantité $B^2-4AC=\lambda^2-4$ est ici positive pour chacune d'elles. Donc les deux courbes se coupent en quatre points réels dont on calculera les cordonnées par l'un des deux procédés indiqués.

286—On résoudra les deux équations

$$x^2+y^2-2x=0,$$
$$2xy-1=0,$$

à l'aide de l'équation du troisième degré

$$\lambda^3-\lambda-1=0,$$

qui n'a qu'une racine réelle; cette racine est positive, et donne deux droites réelles

$$y=\left(-\lambda\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)x\pm\sqrt{\lambda}.$$

En substituant ces deux valeurs de y dans la seconde des équations proposées, on obtient les deux équations du second degré.

$$\left(-\lambda\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)x^2\pm\sqrt{\lambda}x-\frac{1}{2}=0.$$

La condition de réalité des racines est $\sqrt{\lambda^3}<\pm 2$. Cette condition n'est pas remplie si l'on prend le signe inférieur. Elle l'est, au contraire, si l'on prend le signe supérieur; car, dans ce cas, la condition se réduit à $\lambda<\sqrt[3]{4}$, et si l'on substitue ce nombre $\sqrt[3]{4}$— dans l'équation en λ, on a un résultat $3-\sqrt[3]{4}$ évidemment positif, ce qui prouve que la valeur de λ est plus

petite que $\sqrt[3]{4}$. Il résulte de là qu'une seule des deux sécantes rencontre la courbe, et par suite que le cercle et l'hyperbole proposés se coupent en deux points réels et en deux points imaginaires et conjugués.

287—La résolution des deux équations

$$x^2+y^2-2x=0,$$
$$xy-4=0,$$

est ramenée à celle de l'équation du troisième degré

$$\lambda^3-4\lambda-1=0,$$

qui a ses trois racines réelles, une positive et deux négatives. La première seule rend positive la quantité

$$B^2-4AC=\lambda^2-4=\frac{1}{\lambda},$$

et donne deux droites réelles

$$y=\left(-\frac{\lambda}{2}\pm\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right)x\pm2\sqrt{\lambda}.$$

Ces valeurs de y, substituées dans la seconde des équations proposées, conduisent aux deux équations du second degré

$$\left(-\frac{\lambda}{2}\pm\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right)x^2\pm2\sqrt{\lambda}x-4=0.$$

La condition de réalité des racines est $\sqrt{\lambda^3}<\pm2$. Il est évident que cette condition n'est pas remplie si l'on prend le signe inférieur. Elle ne l'est pas non plus si l'on prend le signe supérieur; car, dans ce cas, la condition se réduit à $\lambda<\sqrt[3]{4}$, et si l'on substitue cette valeur $\sqrt[3]{4}$ dans l'équation en λ, on a un résulat négatif $3-4\sqrt[3]{4}$, ce qui prouve que la valeur positive de λ est plus grande que $\sqrt[3]{4}$. Des deux sécantes communes réelles, aucune ne rencontre les courbes. Ainsi les deux courbes proposées se coupent en quatre points imaginaires.

288—Lorsque deux hyperboles ont une asymptote parallèle, l'un des points d'intersection s'éloigne à l'infini, et l'é-

quation résultant de l'élimination de l'une des coordonnées entre les deux équations se réduit au troisième degré. Soient, par exemple, les deux hyperboles

$$xy - y^2 - x = 0,$$
$$y^2 - x^2 - 1 = 0,$$

qui ont chacune une asymptote parallèle à la droite $y = x$; si, dans la seconde, on substitue la valeur de x, tirée de la première, on obtient l'équation du troisième degré

$$y^3 - y + \frac{1}{2} = 0,$$

qui a une racine réelle et deux imaginaires. Les deux hyperboles ne se coupent qu'en un point réel; elles admettent deux sécantes communes réelles; l'une, passant par ce point et le point situé à l'infini, est parallèle à la droite $y = x$; l'autre passe par les deux points imaginaires conjugués.

289—Supposons que, dans les deux équations, les coefficients des termes du second degré soient proportionnels, et rien n'empêche alors de les supposer égaux; si l'on retranche ces deux équations

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$
$$ax^2 + bxy + cy^2 + d'x + e'y + f' = 0,$$

membre à membre, on obtient l'équation du premier degré

$$(d - d')x + (e - e')y + f - f' = 0,$$

et l'élimination de y conduit à une équation du second degré en x. Les deux courbes ne se coupent plus qu'en deux points réels ou imaginaires conjugués; les deux autres points se sont éloignés à l'infini. L'une des sécantes communes réelles passe par les deux points d'intersection; l'autre, du même couple, s'est éloignée à l'infini. Cette circonstance se présente lorsque les courbes sont des hyperboles ayant leurs asymptotes respectivement parallèles; et, en général, comme nous le verrons plus tard, lorsque les deux courbes sont semblables et semblablement placées.

290—Dans certains cas, la recherche des points d'intersec-

tion de deux courbes du second degré se ramène à une équation du second degré ou à une équation bicarrée.

1° Lorsqu'un même diamètre divise en deux parties égales les cordes parallèles dans les deux courbes, si, par une transformation de coordonnées, on rapporte les courbes à ce diamètre commun pris pour axe des x et à une parallèle aux cordes pour axe des y, les deux équations ne contiendront plus l'inconnue y qu'à la seconde poissance ; l'élimination de y^2 donnera un équation du second degré en x.

2° Si ces deux courbes sont des hyperboles ayant une asymptote commune, en les rapportant à cette asymptote prise pour axe des x et à une droite quelconque pour axe des y, on a des équations dans lesquelles le terme en xy contient seul la lettre x: en éliminant ce terme, on obtient une équation du second degré en y.

3° Lorsque les deux courbes ont même centre, si on les rapporte à ce centre commun pris pour origine des coordonnées, les deux équations ne contenant plus de termes du premier degré, l'élimination de y donnera une équation bicarrée en x.

291 — Les considérations précédentes sur les points et les droites imaginaires sont très-utiles, parce qu'elles permettent d'établir des analogies entre des propriétés qui, sans cela, ne pourraient être rattachées les unes aux autres. En voici un exemple assez remarquable : un cercle coupe en quatre points réels ou imaginaires une courbe du second degré; soit $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0$ l'équation du cercle, $A=0$ et $B=0$ celles d'une couple de sécantes communes réelles, l'équation de la courbe du second degré pourra toujours être mise sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=\lambda AB.$$

Le premier membre représente le carré de la longueur de la tangente menée d'un point quelconque de la courbe au cercle ; il en résulte ce théorème : *un cercle étant placé d'une manière quelconque dans le plan d'une courbe du second degré, la*

tangente menée de tout point de la courbe au cercle est à la moyenne proportionnelle entre les distances de ce point à deux sécantes communes réelles dans un rapport constant.

Supposons que le cercle soit tangent à la courbe en deux points réels ou imaginaires conjugués, la droite des contacts sera réelle, et l'équation de la courbe prendra la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=\lambda A^2.$$

Ainsi, *lorsque un cercle est doublement tangent à une courbe du second degré, la tangente menée d'un point quelconque de la courbe au cercle est à la distance de ce point à la corde des contacts dans un rapport constant.*

Le foyer d'une courbe du second degré peut être considéré comme un cercle d'un rayon nul ayant avec la courbe un double contact imaginaire; la directrice est la corde des contacts.

EXERCICES.

1° Construire une courbe du second degré, connaissant la directrice et trois points.

2° Construire une parabole, connaissant le foyer et deux points ou deux tangentes, ou un point et une tangente.

3° Construire une parabole, connaissant la directrice et deux points.

4° Construire une hyperbole, connaissant trois points et la direction des asymptotes.

5° Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, un sommet et un point.

6° Construire une parabole passant par quatre points donnés.

7° Construire une parabole tangente à quatre droites données.

8° Trouver le lieu du sommet d'une parabole ayant un foyer donné et tangente à une droite donnée.

9° Trouver le lieu du foyer d'une parabole ayant son sommet en un point donné et tangente à une droite donnée.

10° Trouver le lieu du centre d'une hyperbole équilatère circonscrite à un triangle équilatéral.

11° Trouver le lieu des foyers ou des sommets d'une hyperbole, ayant une asymptote et une directrice données.

12° Trouver le lieu des centres des courbes du second degré tangentes à quatre droites données.

13° Étant donnée une conique, inscrite dans un angle ; une tangente mobile roule sur la courbe, et on joint à deux points fixes les points où cette tangente coupe les deux côtés de l'angle ; trouver le lieu du point de rencontre de ces deux droites.

14° Étant donnée une ellipse ; un cercle, ayant son centre fixe et son rayon variable, coupe l'ellipse ; trouver le lieu du point de rencontre des sécantes communes.

15° Étant donnée une ellipse, un cercle d'un rayon constant et dont le centre décrit un cercle concentrique à l'ellipse, coupe cette ellipse ; trouver le lieu du point de rencontre des sécantes communes.

16° Un cercle mobile coupe une ellipse donnée en deux points fixes A et B ; trouver le lieu du point de rencontre des tangentes communes aux deux courbes.

Le lieu reste le même quand la sécante commune AB se déplace parallèlement à elle-même.

Étant données deux coniques homofocales, démontrer que, si par deux points de l'une on mène des tangentes à l'autre, ces quatre droites sont tangentes à un même cercle.

17° Trouver le lieu du centre d'une hyperbole qui a un foyer donné et qui coupe en un point donné une droite donnée parallèle à l'une des asymptotes.

18° Trouver le lieu du foyer d'une parabole qui touche deux droites données, l'une en un point fixe, l'autre en un point variable.

19° Trouver le lieu du point de rencontre de deux paraboles, qui admettent pour foyer un point donné, qui touchent une droite donnée et qui se coupent sous un angle donné.

20° Étant donnés trois points A, B, C et une droite indéfinie,

on prend sur cette droite un segment variable MN, vu du point A sous un angle constant ; trouver le lieu du point d'intersection des deux droites BM et CN.

21° Deux angles de grandeurs constantes tournent autour de leurs sommets placés aux extrémités du grand axe d'une ellipse, le point de rencontre de deux des côtés décrit l'ellipse ; trouver le lieu du point de rencontre des deux autres côtés.

22° Trouver le lieu des sommets d'une hyperbole équilatère passant en un point donné et ayant pour asymptote une droite donnée.

23° Étant données une série de coniques ayant pour foyers F et F', et une droite fixe passant par le foyer F ; les tangentes à ces diverses coniques, aux points où chacune d'elles est coupée par cette droite, sont tangentes à une même parabole, qui a pour foyer le point F', et pour direction la sécante.

La partie de chaque tangente comprise entre la conique et la parabole est vue du foyer F' sous un angle droit.

LIVRE IV

THÉORIE GÉNÉRALE DES COURBES.

CHAPITRE I

Construction des Courbes en coordonnées rectilignes.

292—La construction d'une courbe n'est autre chose que la représentation graphique de la marche d'une fonction réelle d'une seule variable, lorsqu'on fait varier d'une manière continue cette variable. Si l'on a calculé les valeurs de y qui répondent à diverses valeurs de x, on connaît un certain nombre de points de la courbe à construire. Mais ces points ne peuvent suffire, même pour un tracé grossier de la courbe ; car on peut les réunir de bien des manières différentes ; et d'ailleurs, il peut arriver qu'entre deux ordonnées, même très-rapprochées, la courbe ait des branches infinies. Il est donc indispensable de connaître préalablement, d'une manière générale, la marche de la fonction dont la courbe doit représenter les variations. Nous distinguerons deux cas, suivant que l'équation est ou n'est pas résolue par rapport à l'une des variables.

ÉQUATIONS RÉSOLUES.

293—Lorsque l'équation est résolue par rapport à l'une des variables, y par exemple, on considère chacune des déterminations de y en particulier, et on examine entre quelles limites doit varier x pour que y reste réelle. Soient a et d deux limites. Si la valeur de y reste finie dans cet intervalle, elle donne une branche finie de courbe; si la valeur de y devient infinie pour une ou plusieurs valeurs intermédiaires b, c....

de la variable, on a diverses branches infinies asymptotes aux droites qui correspondent aux valeurs de x qui rendent y infini; on subdivise alors l'intervalle de a à d en plusieurs autres; un premier de a à b, un second de b à c, etc., de manière que dans chacun d'eux l'ordonnée ne devienne pas infinie.

VARIATIONS DE L'ORDONNÉE. — TANGENTE.

294—On examinera ensuite comment varie y dans chacun des intervalles, par exemple, quand x varie de a à b. Quelquefois, on aperçoit immédiatement, d'après l'expression de y, comment varie cette quantité. Mais le plus souvent, il n'en est pas ainsi ; dans ce cas, on a recours à la dérivée. On sait, en effet, que la variable x croissant à partir d'une certaine valeur, si la fonction reste finie, elle varie dans le même sens, tant que la dérivée conserve le même signe; elle croît, si la dérivée est psitive; elle décroît si la dérivée est négative. Soient α, β, γ,.... les valeurs successives de x comprises entre a et b, pour lesquelles la dérivée change de signe. La variable x croissant de a à α, la dérivée conserve le même signe, par exemple, le signe $+$, la fonction croît; de α à β, la dérivée est négative et la fonction décroît, etc.

Nous avons démontré (nº 88) que le coefficient angulaire de la tangente en un point quelconque de la courbe est égal à la valeur de la dérivée en ce point. Ainsi le sens dans lequel varie l'ordonnée de la courbe est indiqué par le coefficient angulaire de la tangente.

MAXIMA ET MINIMA DE L'ORDONNÉE.

295—Lorsque la dérivée change de signe, de positive devenant négative, l'ordonnée cesse de croître pour décroître ensuite; elle passe donc par une valeur *maximum*. Si, au contraire, la dérivée de négative devient positive, l'ordonnée cesse de décroître pour croître ensuite; elle passe donc par une valeur *minimum*.

Il faut remarquer que ces mots *maximum* et *minimum* ne doivent pas être pris avec leur sens absolu; ils indiquent

seulement la comparaison d'une valeur particulière de l'ordonnée avec les ordonnées voisines.

En général la dérivée, restant finie et continue, change de signe en passant par zéro, et par conséquent les tangentes aux points dont les ordonnées ont des valeurs *maxima* et *minima* sont parallèles à l'axe OX. Il faut remarquer que toute valeur de x qui annule la dérivée ne donne pas nécessairement un maximum ou un minimum de l'ordonnée; on devra examiner si la dérivée change effectivement de signe; mais, dans tous les cas, la tangente est parallèle à l'axe OX.

Nous allons appliquer ces principes à quelques exemples.

296—Exemple I. *Construire la courbe*

$$(1) \quad y = x^3 - 2x^2 - 3x = x(x+1)(x-3).$$

Portons sur l'axe OX et dans le sens OX (fig. 162) une longueur OA égale à 3, et en sens contraire une longueur OB égale à l'unité; la courbe coupe l'axe OX en trois points B, O, A. Pour chaque valeur réelle de x, on a une valeur réelle de y et une seule. L'équation montre immédiatement que lorsque x croît de $-\infty$ à -1, y croît constamment de $-\infty$ à 0; quand x varie de -1 à 0, l'ordonnée est positive, mais la formule n'indique pas comment elle varie; x croissant de 0 à 3, y devient négative, et il y a encore incertitude sur le sens de la variation; enfin, quand x croît de 3 à l'infini, y croît constamment de 0 à l'infini.

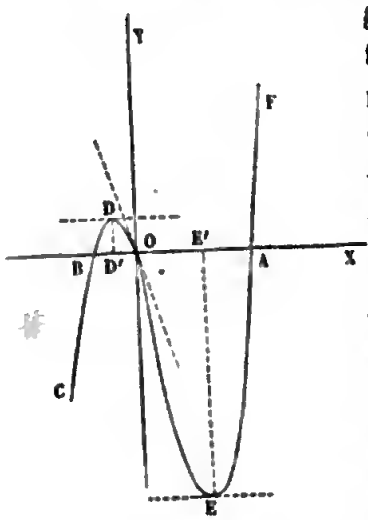


Fig. 162.

Pour déterminer le sens des variations de y, lorsque x varie de -1 à $+3$, prenons la dérivée, on a

$$y' = 3x^2 - 4x - 3.$$

Cette dérivée s'annule pour les deux valeurs

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{13}}{3} = -0,53,$$

$$x_2 = \frac{2+\sqrt{13}}{3} = 1,87.$$

Lorsque x varie de -1 à x_1 la dérivée est positive, la fonction continue à croître; de x_1 à x_2, la dérivée est négative, la fonction décroît, pour croître ensuite de x_2 à 3. L'abscisse x_1 donne une ordonnée maximum $DD' = 0,88$, et l'abscisse x_2 une ordonnée minimum $-EE' = -6,06$.

297—Exemple II. La strophoïde définie au n° 31 a pour équation

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

Quand x varie de 0 à a, la valeur numérique de y augmente constamment de 0 à l'infini; on obtient de la sorte les deux branches infinies OM, OM' asymptotes à la droite HH' (fig. 22). Quand x varie de $-a$ à 0, l'ordonnée y part de 0 pour revenir à 0, en conservant des valeurs finies; elle commence donc par croître pour décroître ensuite, et, par conséquent, elle passe par un maximum; mais on ne voit pas si dans l'intervalle la fonction n'éprouve pas plusieurs alternatives de croissance et de décroissance. La valeur positive de y a pour dérivée

$$y' = \frac{x^2 - ax - a^2}{\sqrt{(a+x)(a-x)}}.$$

Le numérateur s'annule pour deux valeurs de x, l'une négative x_1, l'autre positive x_2. Quand x varie de $-a$ à x_1, la dérivée est positive, la fonction croît; de x_1 à 0 la dérivée est négative, et la fonction décroît. L'ordonnée est maximum pour la valeur

$$x_1 = -a\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

plus grande numériquement que $\frac{a}{2}$.

298—On détermine souvent la tangente en certains points

de la courbe, ou, ce qui est la même chose, certaines valeurs particulières de la dérivée, sans avoir recours à l'expression générale de cette dérivée. Considérons, par exemple, le point O de la strophoïde; joignons ce point à un point voisin M, ayant pour coordonnées x et y; le coefficient angulaire de la sécante OM est égal au rapport $\frac{y}{x}$; on aura le coefficient angulaire de la tangente au point O, en cherchant la limite de ce rapport lorsqu'on fait tendre x vers zéro. Or, on a

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{a+x}{a-x}};$$

quand x tend vers zéro, ce rapport a pour limite ± 1. Les deux branches qui passent au point O ont pour tangentes en ce point les bissectrices des angles des axes. On obtiendrait la tangente au point A en considérant le rapport $\frac{y}{a+x}$; ce rapport augmentant indéfinement lorsque x tend vers $-a$, la tangente au point A est parallèle à l'axe OY.

ÉQUATIONS NON RÉSOLUES.

299—Quand l'équation supposée algébrique n'est pas résolue, soit parce que cette résolution n'est pas possible, soit parce que l'on juge inutile de l'effectuer, on peut quelquefois, en s'appuyant sur les théorèmes concernant les racines des équations, construire la courbe.

On aperçoit immédiatement certaines propriétés de la courbe à l'inspection de l'équation; lorsque l'équation ne renferme que des termes qui sont tous de degrés pairs, ou tous de degrés impairs, il est clair, que si elle est vérifiée par $x=\alpha$, $y=\beta$, elle sera aussi vérifiée par $x=-\alpha$, $y=-\beta$; or, les deux points (α, β), $(-\alpha, -\beta)$ sont placés symétriquement par rapport à l'origine; donc ce point est centre de la courbe.

Si l'équation ne contient que des puissances paires de l'une des variables, y par exemple, les valeurs réelles de y, qui correspondent à une même valeur de x, sont deux à deux égales et de signes contraires; lorsque les axes sont rectangulaires,

on en conclut que les points du lieu sont placés symétriquement par rapport à la droite OX, qui est un axe de la courbe.

Lorsque l'équation de la courbe ne change pas par le changement de x en y et de y en x, si l'équation est vérifiée par $x=\alpha$, $y=\beta$, elle sera vérifiée également par $x=\beta$, $y=\alpha$; ces deux points sont placés symétriquement par rapport à la bissectrice de l'angle YOX, qui est, dans ce cas, un axe de la courbe.

On voit de même que, si l'équation ne change pas par le changement de x en $-y$ et de y en $-x$, la bissectrice de l'angle YOX′ est un axe.

Soit

$$(1)\quad f(x,y)=0$$

l'équation de la courbe; on sait que la dérivée y' est donnée par la formule

$$(2)\quad y'=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}.$$

L'expression de y' contient à la fois les deux variables x et y, elle donne le coefficient angulaire de la tangente en tout point dont on connaît les deux coordonnées.

300—Exemple I. *Construire le lieu des points tels que le produit de leurs distances à deux points fixes* F, F′ *soit égal à un nombre donné.*

Prenons pour origine le milieu O de la droite FF′, OF pour axe des x, une perpendiculaire pour axe des y; appelons $2c$ la distance FF′, a^2 le produit constant, l'équation du lieu est

$$(1)\quad y^4+2(x^2+c^2)y^2+(x^2-c^2)^2-a^4=0.$$

Cette équation, ne renfermant que des puissances paires de chacune des variables, chacun des axes est un axe de symétrie de la courbe, et l'origine est un centre. En considérant y^2 comme l'inconnue, l'équation (1) est du second degré, le binôme B^2-4AC se réduit ici à $4c^2x^2+a^4$, quantité esssentiellement positive, les racines sont donc toujours réelles. Lorsque le dernier terme $(x^2-c^2)^2-a^4$ est positif, les valeurs de y^2 ont le même signe, et comme leur somme $-2(x^2+c^2)$ est

toujours négative, les deux valeurs de y^2 sont négatives et les quatre valeurs de y imaginaires. Pour que l'équation (1) ait des racines reelles, il faut donc que l'on ait

$$(x^2 - c^2)^2 - a^4 < 0,$$

ou

$$(x^2 - c^2 - a^2)(x^2 - c^2 + a^2) < 0,$$

et par conséquent

$$x^2 < a^2 + c^2 \quad \text{et} \quad x^2 > c^2 - a^2.$$

Alors une des valeurs de y^2 est positive, l'autre négative.

Prenons $OA = OA' = \sqrt{a^2 + \cancel{b^2}}$; la courbe est comprise entre les parallèles à l'axe des y menées par les points A et A'. La seconde condition exige que l'on distingue plusieurs cas. c^2

1° $a < c$. Prenons $OB = OB' = \sqrt{c^2 - a^2}$ et par les points B et B' menons des parallèles à OY (fig. 163), la courbe se compose de deux parties comprises, l'une entre les parallèles menées par les points B et A, l'autre entre les parallèles menées par les points B' et A'. Quand on donne à x l'une des valeurs OB ou OA, l'une des valeurs de y^2 est nulle, l'autre négative; x croissant de OB à OA, la valeur de y^2, qui d'abord est nulle, devient positive et s'annule de nouveau. On obtient ainsi une courbe fermée BCAD. Les valeurs négatives de x donnent une seconde courbe B'C'A'D', égale à la précédente.

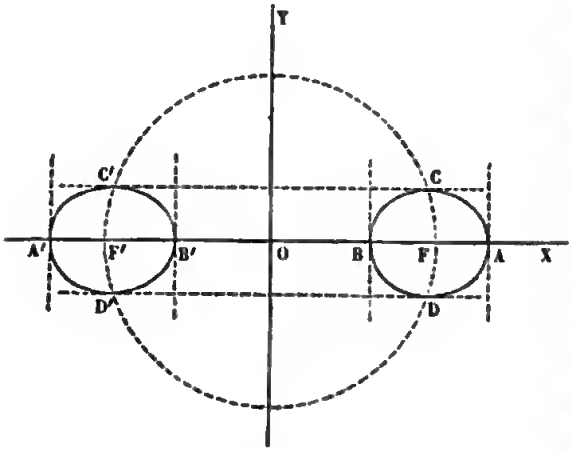


Fig. 163.

Le coefficient angulaire de la tangente est déterminé par la formule

$$(2) \quad y' = -\frac{x(x^2 + y^2 - c^2)}{y(x^2 + y^2 + c^2)}.$$

Aux points A et B, y est nulle et y' infinie, la tangente est parallèle à l'axe OY. Le numérateur de y' devient nul, quand on a

$$(3) \quad x^2 + y^2 = c^2.$$

Du point O comme centre, avec OF pour rayon, décrivons un cercle; ce cercle coupe la courbe en quatre points C, D, C', D', donnés par les formules

$$x^2 = \frac{4c^4 - a^4}{4c^2}, \quad y^2 = \frac{a^4}{4c^2}.$$

Comme l'arc BC est intérieur au cercle, en l'un quelconque des points de cet arc, la fonction $x^2 + y^2 - c^2$ a une valeur négative et y' est positive. Pour les points de l'arc CA, le facteur $x^2 + y^2 - c^2$ est positif et y' négative. Ainsi, de B en C l'ordonnée croît, et de C en A elle décroît; l'ordonnée du point C est maximum.

2° $a = c$. La seconde condition est satisfaite quelle que soit x; x peut varier de $-c\sqrt{2}$ à $c\sqrt{2}$. Quand x varie de 0 à $c\sqrt{2}$, la valeur positive de y^2 part de zéro et redevient nulle; on a une courbe fermée OCADO (fig. 164) qui passe à l'origine; les valeurs négatives de y donnent une courbe symétrique de la précédente par rapport à OY. Le cercle de rayon OF coupe la courbe en quatre points, dont les ordonnées ont une valeur numérique $\frac{c}{2}$ maximum, l'abscisse de ces points a pour valeur absolue $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Cette courbe se nomme *lemniscate*.

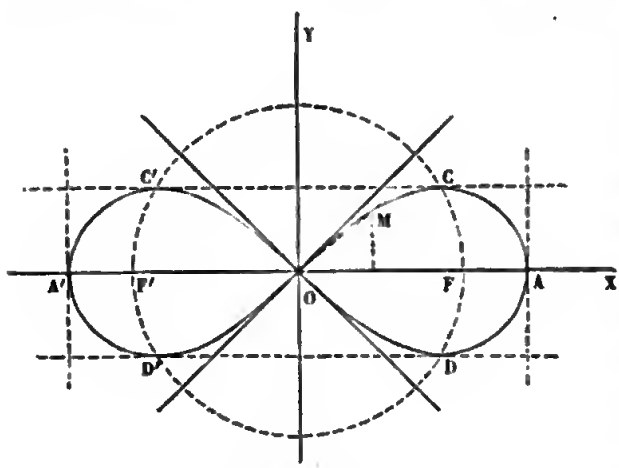


Fig. 164.

A l'origine, la valeur de y' se présente sous la forme

$\frac{0}{0}$; il est facile de concevoir qu'il en est ainsi aux points multiples d'une courbe algébrique quelconque. En effet, la valeur de y' est donnée par la formule

$$y' = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}.$$

Or, $f(x,y)$ étant un polynôme entier par rapport aux variables x et y, les dérivées partielles $f'_x(x, y)$, $f'_y(x,y)$ sont aussi des polynômes entiers par rapport aux mêmes variables. Si ces polynômes ne devenaient pas nuls, lorsqu'on y remplace x et y par les coordonnées du point multiple, y' aurait en ce point une valeur unique, tandis qu'elle doit avoir autant de valeurs différentes qu'il y a de branches qui passent au point multiple. Dans le cas actuel, l'équation étant bicarrée peut être résolue par rapport à y ; à chaque valeur de y correspond une dérivée qui a une valeur déterminée, quand on y remplace x par zéro. Cette valeur de la dérivée est, ainsi que nous l'avons remarqué au n° 298, la limite du rapport $\frac{y}{x}$, lorsque x tend vers zéro. On peut obtenir plus simplement la limite de ce rapport sans résoudre l'équation. Posons $\frac{y}{x} = t$, ou $y = tx$; en substituant dans l'équation (1), il vient

$$x^2 t^4 + 2(x^2 + c^2) t^2 + x^2 - 2c^2 = 0.$$

Lorsque x est très-petit, l'une des valeurs de t^2 est voisine de l'unité, l'autre est négative et très-grande ; donc, en se bornant aux valeurs réelles de y, on a *limite* $\frac{y}{x} = \pm 1$. Les tangentes au point O sont les bissectrices des angles des axes.

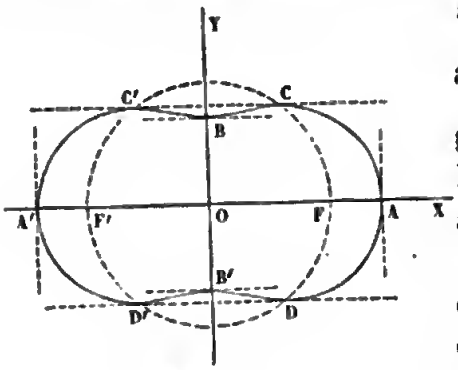


Fig. 165.

3° $a > c$. La seconde condition est encore satisfaite quelle que soit x, qui peut varier de $-\sqrt{c^2 + a^2}$ à

$+\sqrt{c^2+a^2}$. Pour $x=0$, la valeur positive de y^2 est a^2-c^2. Prenons, sur l'axe des y, $OB=OB'=\sqrt{a^2-c^2}$, la courbe passe par les deux points B et B' (fig. 165). Si l'on fait varier x de 0 à $\sqrt{c^2+a^2}$, y^2 part de a^2-c^2 et devient nul; le lieu est une courbe fermée qui a pour sommets les points A, A', B, B'. Pour que le cercle coupe la courbe, il faut que l'on ait $a<c\sqrt{2}$. Lorsque cette condition est satisfaite, l'ordonnée croît de B en C et diminue de C en A; l'ordonnée du point B est minimum, celle du point C maximum.

Si, au contraire, on a $a>c\sqrt{2}$, le cercle est intérieur à la courbe, dont l'ordonnée diminue de B en A (fig. 166); l'ordonnée du point B est maximum. Dans ce cas on donne à la courbe le nom d'*ovale de Cassini*. La figure suppose que a est égal à $c\sqrt{2}$.

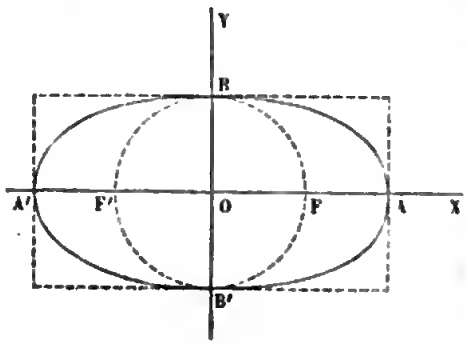


Fig. 166.

301—Exemple II. *Construire la courbe*

$$(1)\quad 2y^5-5xy^2+x^5=0.$$

Cette équation, étant du cinquième degré par rapport à chacune des variables, ne peut être résolue par rapport à aucune d'elles; elle ne renferme que des termes de degrés impairs; donc l'origine est centre de la courbe. Examinons combien l'équation, dans laquelle on considère y comme étant l'inconnue, a de racines réelles pour les diverses valeurs attribuées à x.

Supposons d'abord x positive, l'équation (1) aura au plus deux racines réelles positives, puisque son premier membre n'a que deux variations. La dérivée du premier membre par rapport à y est

$$10y(y^3-x).$$

Cette dérivée est négative depuis $y=0$ jusqu'à $y=\sqrt[3]{x}$,

positive depuis cette valeur jusqu'à l'infini. Le premier membre, qui est positif pour $y=0$, décroît, lorsque y varie de 0 à $\sqrt[3]{x}$, et croît ensuite indéfiniment. L'équation a donc deux racines positives, ou elle n'en a pas, suivant que la valeur $y=\sqrt[3]{x}$ rend le premier membre négatif ou positif; c'est-à-dire suivant que l'on a $x^{10}<27$, ou $x^{10}>27$. Si l'on change y en $-y$, le premier membre offre une variation et une seule; donc l'équation a une racine négative et une seule.

Pour $x=0$, les cinq racines de l'équation (1) sont nulles; x croissant de 0 à $\sqrt[10]{27}$, l'équation a deux racines positives et une racine négative; lorsque x atteint la valeur $\sqrt[10]{27}$, les deux racines positives deviennent égales, puisqu'elles annulent la dérivée. Quand x dépasse $\sqrt[10]{27}$, l'équation n'a plus qu'une racine réelle qui est négative. Les deux racines positives donnent une boucle OABO (fig. 167), comprise dans l'angle YOX, et la racine négative une branche infinie OC placée dans l'angle Y'OX. Aux valeurs négatives de x correspondent une boucle OA'B'O et une branche infinie OC', symétriques des précédentes par rapport au centre.

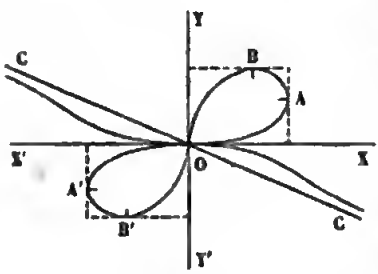


Fig. 167.

La valeur maximum de l'abscisse pour la boucle OABO est $\sqrt[10]{27}$, elle correspond à un point A pour lequel la tangente est parallèle à OY, puisque les coordonnées de ce point annulent $f'_y(x, y)$. En considérant y comme variable arbitraire, on trouve que le maximum de y pour la même boucle est $\sqrt[5]{4}$; ce maximum donne un point B, pour lequel la tangente est parallèle à OX.

La méthode précédente de discussion est applicable toutes les fois que l'équation ne contient que trois termes; car on

sait toujours déterminer le nombre des racines réelles d'une équation trinôme à une seule inconnue.

EMPLOI D'UNE VARIABLE AUXILIAIRE.

302—Lorsqu'il est impossible de résoudre l'équation par rapport à l'une des variables x ou y, on peut dans certains cas exprimer les deux coordonnées à l'aide d'une variable auxiliaire t; et, en suivant les variations simultanées de x et y, lorsque t varie entre les limites qui rendent ces quantités réelles, tracer la courbe.

Si l'on considère y comme une fonction de x, et x comme une fonction de t, on a, en prenant la dérivée de y par rapport à t, d'après le théorème des fonctions de fonctions,[1]

$$D_t y = D_x y \times D_t x;$$

on en déduit la formule

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x},$$

qui donne le coefficient angulaire de la tangente au point qui correspond à une valeur quelconque de t. Les valeurs de t qui annulent $D_t y$ donnent les points pour lesquels la tangente est parallèle à OX, et les valeurs qui annulent $D_t x$, les points pour lesquels la tangente est parallèle à OY.

303—Exemple I. *Construire la courbe*

$$(1)\quad y^4 - y^3 x + x^3 - 2x^2 y = 0.$$

Posons $y = tx$; la substitution dans l'équation (1) donne

$$(2)\quad x = \frac{2t-1}{t^3(t-1)},$$

il en résulte

$$(3)\quad y = tx = \frac{2t-1}{t^2(t-1)},$$

et l'on construit la courbe au moyen des formules (2) et (3), en faisant varier t de $-\infty$ à $+\infty$. Pour suivre les variations de x et de y, prenons

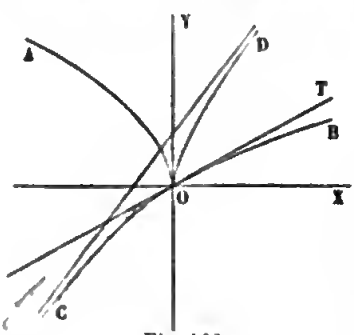


Fig. 168.

es dérivées

[1] Pour désigner la dérivée d'une fonction, on emploie fréquemment la

$$(4)\quad D_t x = -\frac{6t^2-8t+3}{t^4(t-1)^2}.$$

$$(5)\quad D_t y = -\frac{4t^2-5t+2}{t^3(t-1)^2}.$$

Les numérateurs ne s'annulant pour aucune valeur réelle de t ne changent jamais de signe. Les valeurs de x et de y deviennent nulles pour $t=\frac{1}{2}$, infinies pour $t=0$, ou $t=1$.

Si l'on fait varier t de $-\infty$ à 0, x est négatif et décroît de 0 à $-\infty$, y est positif et croît de 0 à l'infini; on obtient ainsi la branche infinie OA (fig. 168).

La variable t allant de 0 à $\frac{1}{2}$, x et y deviennent positifs et décroissent de ∞ à 0, ce qui donne la branche infinie OB.

La variable t allant de $\frac{1}{2}$ à 1, x et y sont négatifs et décroissent de 0 à $-\infty$, on a la branche infinie OC. Le coefficient angulaire de la tangente en O à la branche BOC est $\frac{1}{2}$.

Enfin, si t varie de 1 à ∞, x et y deviennent positifs et décroissent de ∞ à 0, on obtient la branche infinie OD.

Lorsque l'équation entre x et y ne renferme que deux groupes de termes, l'un du degré m, l'autre du degré $m-1$, si l'on prend, comme nous venons de le faire, pour variable auxiliaire le rapport $\frac{y}{x}=t$, les coordonnées x et y sont des fonctions rationnelles de cette variable. Lorsque l'équation contient trois groupes de termes, le premier du degré m, le second du degré $m-1$, le troisième du degré $m-2$, en conservant la même variable auxiliaire, les coordonnées s'ob-

lettre D, initiale du mot *dérivée*; et on indique la variable par rapport à laquelle on prend la dérivée en écrivant cette variable comme un indice au-dessous de la lettre D et un peu à droite. Ainsi $D_t x$ et $D_t y$ indiquent les dérivées des fonctions x et y par rapport à la variable t, $D_x y$ la dérivée de y par rapport à x.

tiennent par la résolution d'une équation du second degré, et on peut encore suivre leurs variations simultanées.

304—Exemple II. *Construction de la courbe*

$$(1)\quad x^5y^4 - xy - x - 2 = 0.$$

Si l'on pose $$xy = t,$$

on obtient $$x = \frac{t+2}{t^4-1}.$$

On peut considérer la courbe comme étant définie par les équations

$$(2)\quad x = \frac{t+2}{t^4-1},$$

$$(3)\quad y = \frac{t}{x} = \frac{t^5-t}{t+2}.$$

Examinons comment varient x et y, lorsqu'on fait varier la variable auxiliaire t de $-\infty$ à $+\infty$. Pour cela prenons les dérivées des deux fonctions, on a

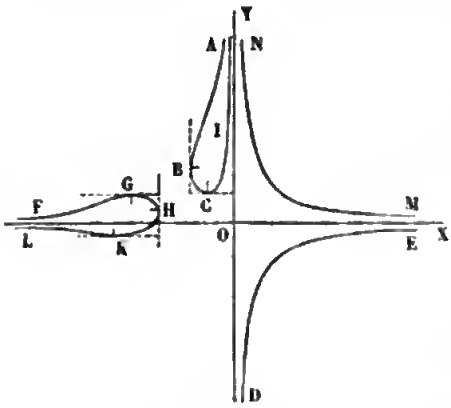


Fig. 169.

$$D_t x = -\frac{3t^4+8t^3+1}{(t^4-1)^2},$$

$$D_t y = \frac{4t^5+10t^4-2}{(t+2)^2},$$

La valeur de $D_t x$ s'annule pour deux valeurs a et b de t comprises, la première entre $-\frac{8}{3}$ et -2, la seconde entre -1 et 0. La valeur de $D_t y$ s'annule pour trois valeurs c, d, e de t, comprises, la première entre $-\frac{5}{2}$ et -2, la seconde entre -1 et 0 et la troisième entre 0 et 1. On reconnaît facilement, en outre, que l'on a $a<c$, $d<b$.

Cela posé, considérons la suite des quantités

$$-\infty,\ a,\ c,\ -2,\ -1,\ d,\ b,\ e,\ +1,\ \infty,$$

rangées par ordre de grandeur. Si l'on fait varier t de $-\infty$ à a, x est négatif, part de 0 et décroît ; y est positif, part de l'infini

et décroît également; on a la branche AB asymptote à l'axe OY (fig. 169).

La variable t allant de a à c, x est négatif et croissant, y positif et décroissant; branche BC.

La variable t allant de c à -2, x est négatif et croît jusqu'à 0; y positif et croît jusqu'à l'infini; branche CI.

La variable t allant de -2 à -1, x croît de 0 à ∞, y croît de $-\infty$ à 0; double branche infinie DE, asymptote à OY′ et à OX.

La variable t allant de -1 à d, x part de $-\infty$ et croît, y part de 0 et croît; branche infinie FG, asymptote à OX′.

La variable t allant de d à b, x continue à croître, et y décroît en restant positif; branche GH.

La variable t allant de b à e, x et y décroissent; branche HK, qui coupe OX′ en un point dont l'abscisse -2 correspond à $t=0$.

La variable t allant de e à $+1$, x décroît, y augmente; branche infinie KL, asymptote à OX′.

Enfin t variant de $+1$ à $+\infty$, x décroît de ∞ à 0, et y croît de 0 à ∞; double branche infinie MN, asymptote à OX et OY.

Les tangentes aux points C, G, K, qui correspondent aux valeurs c, d, e de t qui annulent $D_t y$, sont parallèles à OX; les tangentes aux points B et H sont parallèles à l'axe OY.

CHAPITRE II.

Convexité et Concavité.

305—Soit AB un arc de courbe correspondant à une détermination de y, et aux valeurs de x comprises entre a et b; nous supposons que dans cet intervalle la dérivée seconde y'' conserve le même signe, par exemple, reste positive. Menons la tangente RS en un point quelconque M de cet arc, ayant pour abscisse x_0, désignons par y'_0 la valeur de la

dérivée en ce point, ou le coefficient angulaire de la tangente, et par Y l'ordonnée d'un point quelconque de cette droite; la différence $y - Y$ s'annule pour $x = x_0$, et il en est de même de sa dérivée $y' - Y'$ ou $y' - y'_0$ (fig. 170). L'abscisse x croissant de a en b, et la dérivée y'' étant positive, la fonction $y' - y'_0$ va en croissant; comme elle s'annule pour $x = x_0$, elle est négative de a à x_0, et positive de x_0 à b. Considérons maintenant la fonction $y - Y$, qui admet pour dérivée $y' - y'_0$; quand x varie de a à x_0, la dérivée étant négative, la fonction décroît; comme elle s'annule pour $x = x_0$, elle était positive auparavant; x variant de x_0 à b, la dérivée est positive et la fonction croît; comme elle s'annule pour $x = x_0$, elle est aussi positive de x_0 à b. Il en résulte que la différence $y - Y$ reste positive dans l'intervalle de a à b. On conclut de là que l'arc de courbe AB est situé tout entier d'un même côté de chacune de ses tangentes; c'est un arc *convexe*. Il en serait de même, si la dérivée seconde restait négative; mais la différence $y - Y$ étant négative, l'arc serait situé tout entier de l'autre côté de la tangente. Il est facile de distinguer ces deux côtés; par le point M menons une parallèle MY_1 à l'axe OY, et dans la direction des y positifs; dans le premier cas, l'arc est situé du même côté de la tangente que la demi-droite MY_1; dans le second cas, il est de l'autre côté. Dans le premier cas, on dit que l'arc AB tourne sa *concavité* dans la direction MY_1; dans le second cas, dans la direction opposée.

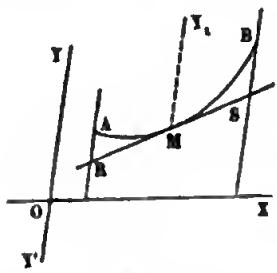


Fig. 170.

On sait que le signe de y'' indique le sens de la variation de y' quand x croît. Si donc on imagine que le point M parcourre l'arc AB, le coefficient angulaire ira en croissant si y'' est positive, et, au contraire, en décroissant, si y'' est négative.

306—On appelle points d'*inflexion* les points où la concavité change de sens, c'est-à-dire les points où la dérivée

seconde change de signe. En général, la quantité y'', étant finie et continue, change de signe en passant par zéro. Supposons que y'' change de signe pour $x=x'_0$ en passant par zéro, on verra facilement que la dérivée première $y'-y'_0$ ne change pas de signe, mais que la fonction $y-Y$ change de signe; de sorte qu'en ce point la courbe passe d'un côté à l'autre de la tangente.

307—Exemple I. Soit la courbe

$$y=x\,(x+1)\,(x-3)=x^3-2x^2-3x,$$

construite au n° 296, on a

$$y'=3x^2-4x-3,$$

et

$$y''=6x-4.$$

La dérivée seconde est négative quand x varie depuis $-\infty$ jusqu'à $\frac{2}{3}$, et positive au delà. La courbe a un point d'inflexion dont l'abscisse est $\frac{2}{3}$; à gauche de ce point, la concavité est tournée vers les y négatifs, à droite vers les y positifs.

308—Exemple II. *Sinussoïde.* Construire la courbe

$$y=\sin x.$$

Quand x croît de 0 à π, l'ordonnée est positive ; elle part de 0 pour revenir à 0, ce qui donne l'arc OAC (fig. 171) symétrique

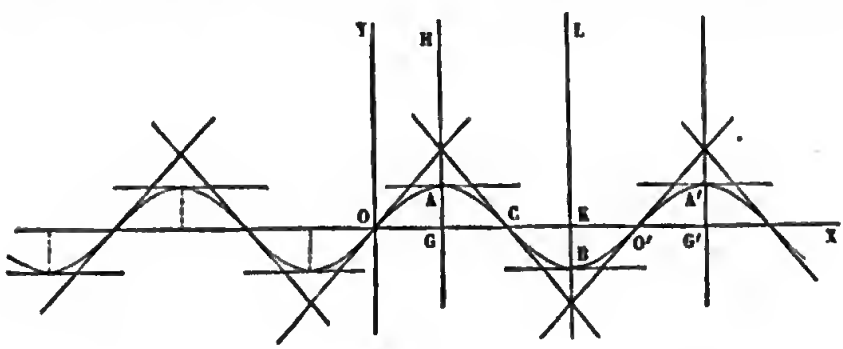


Fig. 171.

par rapport à l'ordonnée qui correspond à $x=\frac{\pi}{2}$. Quand x croît de π à 2π, y devient négatif, et l'on obtient l'arc CBO' égal

au premier. De 2π à 4π, l'ordonnée reprend les mêmes valeurs que de 0 à 2π, de même de 4π à 6π, etc. Ainsi la courbe se compose d'une infinité d'ondulations égales.

Le coefficient angulaire de la tangente est donné par la formule

$$y' = \cos x\,;$$

A l'origine, $y' = 1$, la tangente est la bissectrice de l'angle YOX des axes. Au point C, $y' = -1$, la tangente est parallèle à l'autre bissectrice. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, la dérivée s'annule et de positive devient négative; l'ordonnée du point A est maximum. Pour $x = 3\frac{\pi}{2}$, la dérivée s'annule également, de négative devenant positive; l'ordonnée du point B est minimum.

Quand x varie de 0 à π, le coefficient angulaire de la tangente $\cos x$ décroît constamment, la concavité est tournée vers les y négatifs; de π à 2π, le cosinus augmente, la concavité est dérigée vers les y positifs, le point C est un point d'inflexion.

Il est à remarquer que cette courbe a une infinité de centres, situés à égale distance les uns des autres, sur l'axe X'X, les points O, C, O',..... dont les abscisses sont les multiples de π. Chacun d'eux est un point d'inflexion.

309—Exemple III. *Construire la courbe*

$$(y - x^2)^2 - x^5 = 0,$$

ou

$$y = x^2 \pm \sqrt{x^5} = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}.$$

Les valeurs de y ne sont réelles que lorsque x est positif. Prenons d'abord le signe + devant le radical; la fonction $y = x^2 + x^{\frac{5}{2}}$ augmente de 0 à l'infini, quand x varie de 0 à ∞. La dérivée $y' = 2x + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ part de 0 et augmente aussi constamment, on a donc une branche infinie OD tangente en O à l'axe OX et qui tourne sa concavité vers les y positifs. Prenons maintenant le signe — devant le radical; la valeur de

y est positive de 0 à 1, et négative au delà. Portons sur OX une longueur OA égale à l'unité, la courbe passe en A. La

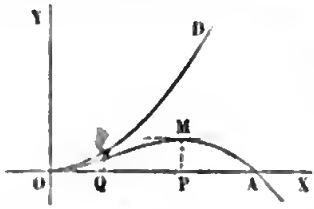


Fig. 172.

dérivée $y'=2x-\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$, nulle au point O, est positive tant que x reste moindre que $\frac{16}{25}$, et négative quand x dépasse ce nombre; l'ordonnée MP, qui correspond à $\frac{16}{25}$ est maximum, et la tangente en M est parallèle à OX. La dérivée seconde $2-\frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}$ reste positive depuis 0 jusqu'à $\frac{64}{225}$, négative au delà; le point N, qui correspond à l'abscisse $\frac{64}{225}$ est un point d'inflexion; de O en N, la concavité est tournée vers les y positifs; au delà, elle est tournée vers les y négatifs.

Deux branches de la courbe sont tangentes au point O à la droite OX, sans être la continuation l'une de l'autre; les points qui offrent cette particularité se nomment *points de rebroussement*. Dans cette courbe, les deux branches sont du même côté de la tangente. En considérant la courbe

$$(y-x^2)^2-x^3=0,$$

on aurait deux branches situées de part et d'autre de la tangente; la cissoïde présente à son sommet A (fig. 20) un rebroussement de cette sorte.

310—Exemple IV.—Soit la courbe

$$(1)\quad y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

On suppose que a désigne une ligne donnée; alors l'équation (1) est homogène et définit une courbe, à laquelle on a donné le nom de *chaînette*, parce que c'est la courbe que forme un fil flexible pesant, dont les extrémités sont attachées à deux points fixes.

L'équation (1) donne des valeurs de y égales pour deux valeurs de x égales et de signes contraires, la droite OY est un axe de la courbe. Quand x varie de 0 à ∞, le terme $e^{\frac{x}{a}}$ augmente, mais le terme $e^{-\frac{x}{a}}$ diminue; pour savoir comment varie y, prenons la dérivée. On a

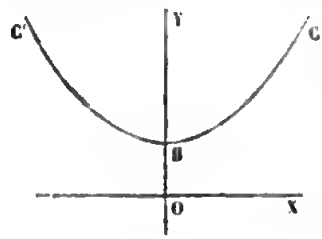


Fig. 173.

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Cette dérivée est positive pour toutes les valeurs positives de x; donc quand x croît de 0 à ∞, la valeur de y augmente constamment de a à ∞, ce qui donne une branche infinie BC (fig. 173); on obtient la branche BC′ symétrique par rapport à OY en donnant à x des valeurs négatives.

La valeur de y' augmente constamment quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, la courbe a sa *concavité* tournée vers les y positifs.

311—Exemple V.—*Construire la courbe*

$$(1)\quad y = e^{\frac{1}{x}}.$$

Donnons à x une valeur positive très-petite, y est positif et très-grand; x croissant de 0 à $+\infty$, y décroît constamment de ∞ à 1; ce qui donne une branche AC (fig. 174), asymptote d'une part à OY, d'autre part à la droite G′G menée parallèlement à OX et à une distance de cette droite égale à l'unité. Quand on donne à x une valeur négative très-petite numériquement, y est positif et très-petit, x variant de 0 à $-\infty$, y croît constamment de 0 à 1; on a ainsi une branche OD partant de l'origine et asymptote à la droite BG′.

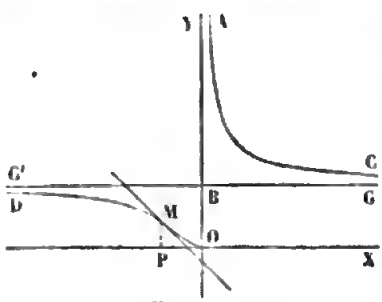


Fig. 174.

Cette courbe présente une particularité que nous n'avons pas encore rencontrée; la branche DO s'arrête brusquement

au point O ; on donne aux points de cette espèce le nom de *points d'arrêt.*

Pour avoir le sens de la concavité, prenons d'abord la dérivée première ; on a

$$(2)\quad y' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

Lorsque x varie de 0 à ∞, les deux facteurs $\frac{1}{x^2}$ et $e^{\frac{1}{x}}$ diminuent ; à cause du signe —, y' augmente ; la concavité de la branche AC est tournée vers les y positifs ; x variant de $-\infty$ à 0, le facteur $\frac{1}{x^2}$ augmente, le facteur $e^{\frac{1}{x}}$ diminue ; on ne sait pas immédiatement comment varie y' ; la dérivée seconde va nous l'apprendre. On a

$$(3)\quad y'' = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}(2x+1).$$

Quand x varie de $-\infty$ à $-\frac{1}{2}$, la dérivée seconde est négative ; prenons OP égal à $\frac{1}{2}$ et soit M le point correspondant de la courbe ; l'arc DM a sa concavité dirigée vers les y négatifs ; x croissant de $-\frac{1}{2}$ à 0, y'' est positif, l'arc MO est concave vers les y positifs et le point M est un point d'inflexion.

312—Remarque.—On ne voit pas, d'après la formule (2), ce que devient le coefficient angulaire de la tangente quand x est négatif et très-petit numériquement. Posons $x = -\frac{1}{m}$, m étant très-grand, la valeur numérique de y' prendra la forme $\frac{m^2}{e^m}$. Donnons d'abord à m des valeurs entières, et comme e est plus grand que l'unité, posons $e = 1 + \alpha$; on a

$$e^m = (1+\alpha)^m > 1 + \frac{m}{1}\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\alpha^3,$$

d'où

$$\frac{e^m}{m^2} > \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m}\alpha + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}\alpha^2 + \frac{m\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}\alpha^3;$$

si m augmente indéfiniment, on voit que $\frac{e^m}{m^2}$ croît au delà de toute limite. Lorsque m est fractionnaire, il est compris entre deux entiers consécutifs n et $n+1$; il en résulte

$$\frac{e^n}{(n+1)^2} < \frac{e^m}{m^2} < \frac{e^{n+1}}{n^2},$$

$\frac{e^m}{m^2}$, étant compris entre deux nombres très-grands est lui-même très-grand; ainsi de quelque façon que m augmente indéfiniment, $\frac{e^m}{m^2}$ croît au delà de toute limite. Un raisonnement analogue est applicable à $\frac{e^m}{m^p}$, quel que soit le nombre positif p.

Le rapport inverse $\frac{m^2}{e^m}$ tend donc vers zéro, lorsque m augmente indéfiniment. Ainsi la tangente au point O de la branche OD est l'axe OX'.

313—Considérons le cas où l'équation de la courbe

$$(1)\quad f(x, y) = 0$$

n'est résolue par rapport à aucune des variables x et y; la dérivée y' est donnée par l'équation

$$(2)\quad f'_x(x, y) + f'_y(x, y)\, y' = 0.$$

Puisque y et y' sont deux fonctions de x, le premier membre de l'équation (2) est une fonction *composée* de la variable indépendante x; cette fonction a pour dérivée

$$f''_{y^2} + 2f''_{xy}\, y' + f''_{x^2}\, y'^2 + f'_y y'';$$

comme elle est constamment nulle, sa dérivée est aussi nulle et l'on a l'équation

$$(3)\quad f''_{x^2} + 2f''_{xy}\, y' + f''_{y^2} y'^2 + f'_y y'' = 0,$$

qui donne la valeur de y''. Si l'on remplace, dans cette équation, y' par sa valeur tirée de l'équation (2), il vient

$$y'' = -\frac{f''_{x^2}(f'_y)^2 - 2f''_{xy} f'_x f'_y + f''_{y^2}(f'_x)^2}{(f'_y)^3}.$$

C'est à l'aide de cette formule que l'on détermine le sens de la concavité, ainsi que les points d'inflexion.

314—Appliquons à la courbe définie n° 300. L'équation de cette courbe peut se mettre sous la forme

$$(1)\quad f(x,y)=\frac{1}{4}\left[(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2-a^4\right]=0.$$

On en déduit

$$f'_x=x(x^2+y^2-c^2),\quad f'_y=y(x^2+y^2+c^2)$$

$$f''_{x^2}=(x^2+y^2-c^2)+2x^2,\quad f''_{xy}=2xy,\quad f''_{y^2}=(x^2+y^2+c^2)+2y^2.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la formule précédente, on obtient, après avoir réduit en tenant compte de l'équation (1),

$$y''=\frac{a^4[3c^2(y^2-x^2)-(a^4-c^4)]}{y^3(x^2+y^2+c^2)^3}.$$

Pour chaque portion de la courbe comprise dans l'un des angles des axes de coordonnées, le dénominateur conserve le même signe; la valeur de y'' ne peut donc changer de signe que lorsque le numérateur passe par zéro. Les coordonnées des points qui annulent le numérateur doivent satisfaire à la fois à l'équation (1) et à la suivante

$$(2)\quad y^2-x^2-\frac{a^4-c^4}{3c^2}=0.$$

De ces deux équations on déduit

$$(3)\quad y^2+x^2=\sqrt{\frac{a^4-c^4}{3}}.$$

Dans le premier cas, lorsque a est plus petit que c, les valeurs de x et de y données par les équations (1) et (3) étant imaginaires, le numérateur de y'' a le même signe pour tous les points de l'axe BA; on vérifie aisément qu'il est négatif aux points B et A, la concavité de cet arc est dirigée vers les y négatifs. Dans le second cas, $a=c$, le numérateur devient nul au point O seulement; il est positif de O en A, et la concavité de l'arc OA est dirigée vers les y négatifs. L'arc A'D'OCA présente au point O un point d'inflexion. Dans le troisième cas, on a $a>c$; pour que les valeurs de x et de y soient réelles, on doit avoir en même temps $a<c\sqrt{2}$. Lors-

que a est plus grand que $c\sqrt{2}$, le numérateur est négatif en tous les points de l'arc BA, et la concavité tournée vers les y négatifs; si a est plus petit que $c\sqrt{2}$, le numérateur s'annule pour un certain point G situé entre B et C; de B en G il a le même signe qu'au point B; il est positif, et la concavité est tournée vers les y positifs; de G en A le numérateur a le même signe qu'au point A; il est négatif, et la concavité dirigée du côté des y négatifs. Le point G est un point d'inflexion.

CHAPITRE III.

Asymptotes.

315—Lorsqu'on a une branche de courbe infinie MN (fig. 175), il peut arriver que la distance MH d'un point M de cette courbe à une droite CD tende vers zéro, lorsque le point M s'éloigne indéfiniment; dans ce cas, la droite CD est dite asymptote de la branche de courbe.

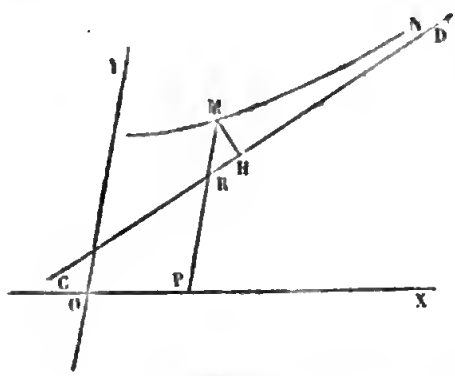


Fig. 175.

Considérons la différence MR entre les ordonnées de la courbe et de la droite, qui correspondent à une même abscisse et désignons par β l'angle de la droite CD avec l'axe des y, on a

$$MR = \frac{MH}{\sin\beta};$$

on voit que, si l'une des quantités MH et MP tend vers zéro, il en est de même de la seconde. On peut donc définir l'asymptote *une droite telle que la différence des ordonnées de la courbe et de la droite ait pour limite zéro quand* x *augmente indéfiniment.*

On ne peut pas transformer ainsi la définition lorsque

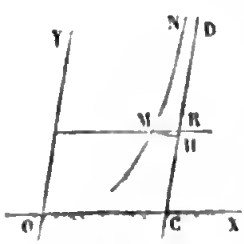


Fig. 176.

l'angle β est nul, c'est-à-dire quand l'asymptote est parallèle à l'axe des y. Dans ce cas, si l'on mène la droite MR (fig. 176) parallèle à l'axe OX, la droite MR tend vers zéro, quand le point M s'éloigne à l'infini, c'est-à-dire quand l'ordonnée croît indéfiniment. Si l'on appelle a l'abscisse qui fixe la position de la droite CD, l'abscisse d'un point M de la branche MN tend vers a quand y augmente indéfiniment, ou, inversement y croît au delà de toute limite, lorsque x tend vers a.

ASYMPTOTES PARALLÈLES A L'AXE DES y.

316—D'après ce qui précède, on obtiendra les asymptotes de cette espèce en cherchant les valeurs finies de x qui rendent y infinie. Lorsque l'équation de la courbe est résolue par rapport à y, on obtient en général immédiatement ces valeurs à l'inspection de la valeur de y. Nous pouvons citer comme exemples la cissoïde et la strophoïde, construites aux nos 28 et 31. Quand l'équation de la courbe est algébrique, mais non résolue par rapport à y, on obtient les asymptotes de la manière suivante. Soit m le degré de l'équation, n le plus haut exposant de y, on peut écrire l'équation sous la forme

$$\varphi(x)y^n + \psi(x)y^{n-1} + \chi(x)y^{n-2} + \ldots = 0,$$

$\varphi, \psi, \chi, \ldots$ désignant des polynômes en x, de degrés au plus égaux à $m-n$, $m-n+1$, $m-n+2$, ..., et, après avoir divisé par y^n,

$$(1)\quad \varphi(x) + \psi(x)\frac{1}{y} + \chi(x)\frac{1}{y^2} + \ldots + \pi(x)\frac{1}{y^n} = 0.$$

Si, lorsque y augmente indéfiniment, x tend vers une limite finie a, pour un couple de valeurs dans lequel y est très-grand et x voisin de a, tous les termes, à partir du second, étant très-petits; on en conclut que l'abscisse a doit annuler le premier terme. Ainsi *les asymptotes parallèles à l'axe des* y *sont déterminées par les racines réelles de l'équation*

$$(2)\quad \varphi(x) = 0.$$

Lorsque x tend vers a, l'une au moins des n valeurs de $\frac{1}{y}$,

données par l'équation (1), tend vers zéro, puisque le produit des racines est très-petit. Si a annule $\varphi(x)$ sans annuler $\psi(x)$, une seule des valeurs de $\frac{1}{y}$ tend vers zéro, et cette valeur est nécessairement réelle; car les racines imaginaires étant deux à deux conjuguées, quand l'une d'elles tend vers zéro, il en est de même de la seconde. La valeur de $\frac{1}{y}$ considérée changera ou ne changera par de signe, quand x passera par a, suivant que a sera racine d'ordre impair ou d'ordre pair de l'équation (2); la droite indéfinie sera toujours asymptote à deux branches de courbe correspondant, l'une à des valeurs de x plus petites que a, l'autre à des valeurs plus grandes. Mais lorsque $\psi(x)$ devient nul en même temps que $\varphi(x)$, ce raisonnement n'est plus applicable; il peut y avoir un nombre pair de valeurs imaginaires de $\frac{1}{y}$ qui tendent vers zéro, lorsque x s'approche de a et la droite peut n'être asymptote d'aucune branche réelle; ce cas demanderait une discussion plus approfondie.

317—Exemple I.—Soit la courbe définie par l'équation

$$x^4y^4+(x^2-4)(y-x)^4=0,$$

qui, ordonnée, s'écrit

$$(1)\quad (x^4+x^2-4)y^4-4x(x^2-4)y^3+6x^2(x^2-4)y^2-4x^3(x^2-4)y+x^4(x^2-4)=0.$$

L'équation bicarrée

$$(2)\quad \varphi(x)=x^4+x^2-4=0,$$

a deux racines réelles simples égales et de signes contraires

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}=\pm a.$$

Comme les valeurs de x n'annulent pas $\psi(x)$, chacune des droites $x=\pm a$ est asymptote de deux branches situées, l'une du côté des y positifs, l'autre du côté des y négatifs, et de part et d'autre de la courbe.

318—Exemple II.—Soit la courbe

$$(1)\quad (x-1)^2y^2+4-x^2=0.$$

L'équation $\varphi(x)=0$ devient

$$(x-1)^2=0.$$

Cette équation admet la racine double $x=1$, or quand x s'approche de l'unité les deux valeurs des y sont imaginaires, la droite $x=1$ n'est donc pas asymptote.

ASYMPTOTES NON PARALLÈLES A L'AXE DES y.

319—Considérons une branche de courbe infinie ayant une asymptote non parallèle à l'axe des y; une pareille asymptote a pour équation

$$y_1=cx+d,$$

c et d étant deux constantes inconnues qu'il s'agit de déterminer. Représentons par y et y_1 les ordonnées de la courbe et de la droite qui correspondent à une même abscisse, par δ la différence $y-y_1$; d'après la définition, δ est une fonction de x qui a pour limite zéro quand x augmente indéfiniment. La branche de courbe infinie que nous considérons est donc représentée par l'équation

$$(1)\quad y=y_1+\delta=cx+d+\delta.$$

Quelquefois on peut mettre facilement l'équation de la branche de courbe sous la forme précédente et alors on a de suite l'asymptote. Considérons, par exemple, l'équation

$$y=\frac{F(x)}{f(x)},$$

$f(x)$ et $F(x)$ représentant deux polynômes entiers en x, le premier du degré m, le second au plus du degré $m+1$; les valeurs finies de x qui annulent le dénominateur donnent des branches infinies ayant leurs asymptotes parallèles à l'axe des y. Il y a, en outre, deux autres branches infinies que l'on obtient en donnant à x des valeurs très-grandes, positives ou négatives. Nous cherchons actuellement l'asymptote de ces deux branches. Si l'on effectue la division en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x, on obtient un quotient entier $cx+d$, qui est au plus du premier degré, et l'on a

$$y=cx+d+\frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier d'un degré inférieur à m; cette dernière fraction tendant vers zéro, quand x augmente indéfiniment, on voit que la droite $y_1 = cx + d$ est asymptote aux deux branches que nous considérons.

Nous citerons encore, comme exemple, la courbe transcendante

$$y = x + \frac{1}{e^x},$$

qui a une branche infinie dans l'angle YOX asymptote à la droite $y = x$.

En général, on n'obtient pas aussi facilement les asymptotes. Revenons à l'équation (1). On en déduit

$$c = \frac{y}{x} - \frac{d+\delta}{x}.$$

Puisque d a une valeur finie et que δ tend vers zéro quand x augmente indéfiniment, on a

$$(2)\quad c = \textit{limite de } \frac{y}{x}.$$

Le coefficient angulaire de l'asymptote est égal à la limite vers laquelle converge le rapport $\frac{y}{x}$, *quand* x *augmente indéfiniment.*

La même équation (1) donne

$$c = y - dx - \delta,$$

d'où

$$(3)\quad d = \textit{limite de } (y - cx).$$

L'ordonnée à l'origine de l'asymptote est égale à la limite de la différence y — cx, *quand* x *augmente indéfiniment.*

Ces deux propriétés servent à déterminer les asymptotes d'une courbe.

320—Supposons d'abord l'équation résolue par rapport à y, et considérons une détermination de y qui donne une branche réelle infinie. Quand x augmente indéfiniment, on prend, pour cette branche, le rapport $\frac{y}{x}$. Si ce rapport ne tend pas vers une limite finie, la branche n'a pas d'asymptote. Si le rapport tend vers une limite finie c, on considère

la différence $y - cx$; lorsque cette différence ne tend pas vers une limite finie, la branche n'a pas d'asymptote; si, au contraire, elle tend vers la limite d, on aura

$$y - cx = d + \delta,$$

δ tendant vers zéro quand x augmente indéfiniment; donc la droite

$$y_1 = cx + d$$

sera asymptote de la branche que l'on étudie.

321—Exemple I.—*Construire la courbe*

$$(1)\quad y = \pm x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}},$$

rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires. L'axe OX est axe de la courbe. Lorsque x varie de 0 à l'unité, y reste fini; il est d'abord nul et redevient égal à zéro; on a ainsi la boucle OAO (fig. 177). Pour les valeurs de x comprises entre 1 et 2, y est imaginaire. Quand x dépasse 2 d'une petite quantité, y est réel et très-grand; si donc on prend OB égal à 2 et que l'on mène G'G parallèle à OY, cette droite sera asymptote de deux branches de la courbe.

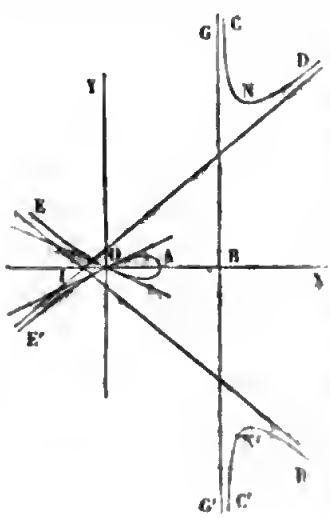


Fig. 177.

Si l'on fait croître y à partir de 2, y commence par diminuer et redevient très-grand quand x est grand; on obtient ainsi les deux branches CND, C'N'D'. Lorsque x est négatif, y est toujours réel; x variant de 0 à $-\infty$, la valeur numérique de y varie également de 0 à ∞, et l'on a les deux branches OE, OE'.

Considérons l'une des branches infinies, ND par exemple, on l'obtient en prenant le signe + dans l'équation (1) et en supposant x positif et très-grand. On a

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}};$$

la limite de $\frac{y}{x}$ est l'unité. On a ensuite

$$y-x=x\left[\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}-1\right]=x\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}},$$

et, en multipliant les deux termes par la somme des radicaux

$$y-x=\frac{x}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})};$$

la limite est $\frac{1}{2}$; donc la droite

$$y=x+\frac{1}{2}$$

est asymptote de la branche considérée.

La même droite est asymptote de la branche OE′ ; à cause de la symétrie de la figure, les deux branches N′D′ et OE ont pour asymptote la droite

$$y=-x-\frac{1}{2}.$$

322—Exemple II.—*Construire la courbe*

$$y^3+x^3=1.$$

La bissectrice de l'angle YOX est axe de la courbe. A chaque valeur réelle de x correspond une valeur réelle de y et une seule; la courbe est formée de deux branches qui s'étendent à l'infini, l'un du côté des x positifs, l'autre du côté des x négatifs (fig. 178).

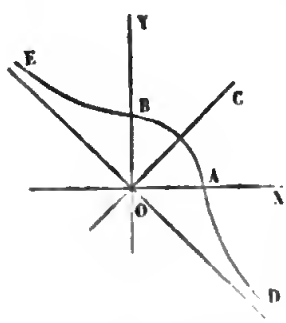


Fig. 178.

Considérons la branche AD, on a

$$y=\sqrt[3]{1-x^3},$$

$$\frac{y}{x}=\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1};$$

la limite du rapport $\frac{y}{x}$ est égale à -1.

On a ensuite

$$y+x=\frac{y^3+x^3}{y^2-xy+x^2}=\frac{1}{y^2-yx+x^2}.$$

Quand x est positif et très-grand, y est négatif et très-grand numériquement ; donc $y+x$ a pour limite zéro, et la droite

$$y=-x$$

est asymptote de la branche AD, et par suite de la branche BE.

323—Exemple III.—*Construire la courbe*

$$y = \pm x^3 \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}.$$

Les branches de la courbe sont disposées comme celles de la figure 177. Les branches qui correspondent aux valeurs de x très-grandes numériquement n'ont pas d'asymptote, parce que la valeur numérique du rapport $\frac{y}{x}$ croît au delà de toute limite, en même temps que x.

324—Exemple IV.—Considérons la courbe

$$y^4 - y^3 x + x^3 - 2x^2 y = 0,$$

construite au n° 303. Nous avons exprimé les deux coordonnées x et y à l'aide de la variable auxiliaire $t = \frac{y}{x}$. On obtient les deux branches OA et OB en faisant croître indéfiniment la valeur numérique de t; elles n'ont pas d'asymptote. On obtient les deux branches infinies OB et OC, quand t tend vers l'unité. Pour ces branches, on a $\lim \frac{y}{x} = 1$. Cherchons si la différence $y - x$ a une limite. Les formules (2) et (3), par lesquelles on exprime x et y au moyen de t donnent

$$y - x = (t-1)x = \frac{2t-1}{t^3};$$

cette différence tend vers l'unité, quand t tend vers la même limite. Il en résulte que les deux branches considérées ont pour asymptote la droite

$$y = x + 1.$$

325—Exemple V.—Soit la chaînette construite au n° 310. D'après la remarque n° 312, le rapport $\frac{e^{\frac{x}{a}}}{x}$ croît indéfiniment avec x; la chaînette n'a pas d'asymptote.

326—Considérons maintenant le cas où l'équation, supposée

algébrique et entière, n'est pas résolue par rapport à la variable y. Réunissons les termes du même degré ; représentons par $\varphi(x,y)$ l'ensemble des termes du degré le plus élevé m, par $\psi(x,y)$ l'ensemble des termes du degré $m-1$, par $\chi(x,y)$ les termes du degré $m-2$...., l'équation s'écrira

$$(1)\quad f(x,y)=\varphi(x,y)+\psi(x,y)+\chi(x,y)+\ldots,=0.$$

Désignons par u le rapport $\frac{y}{x}$, et dans l'équation (1) remplaçons y par ux ; le polynôme $\varphi(x,y)$, homogène et du degré m en x et y, renfermera le facteur x^m commun à tous ses termes, et l'on aura $\varphi(x,y)=x^m\varphi(1,u)$, ou, pour abréger, $\varphi(x,y)=x^m\varphi(u)$. De même, les polynômes $\psi(x,y)$, $\chi(x,y)$.... deviendront $x^{m-1}\psi(u)$, $x^{m-2}\chi(u)$.... L'équation entre x et u sera donc

$$x^m\varphi(u)+x^{m-1}\psi(u)+x^{m-2}\chi(u)+\ldots.=0.$$

et, si l'on divise par x^m,

$$(2)\quad \varphi(u)+\frac{1}{x}\psi(u)+\frac{1}{x^2}\chi(u)+\ldots.=0.$$

Cette équation est par rapport à u du même degré que l'équation (1) par rapport à y ; elle donne pour chaque valeur de x les diverses valeurs du rapport $\frac{y}{x}$. Quand la valeur numérique de x augmente indéfiniment, si l'une des valeurs de u tend vers une limite finie c, pour un couple de valeurs, dans lequel x est très-grand et u voisin de c, tous les termes de l'équation (2), à partir du second, étant très-petits, on en conclut que le nombre c doit annuler le polynôme $\varphi(u)$. Ainsi *les coefficients angulaires des asymptotes sont racines réelles de l'équation*

$$(3)\quad \varphi(u)=0.$$

Soit c l'une des racines réelles de cette équation. Posons

$$y-cx=v,$$

d'où

$$u=\frac{y}{x}=c+\frac{v}{x}.$$

Si dans l'équation (2) on remplace u par cette valeur, on

obtient l'équation qui donne les valeurs de v pour chaque valeur de x. Après avoir fait la substitution, développons chaque terme, l'équation devient

$$(4)\quad \left.\begin{aligned} &\varphi(c)+\varphi'(c)\frac{v}{x}+\frac{\varphi''(c)}{1.2}\frac{v^2}{x^2}+\ldots\\ &+\psi(c)\frac{1}{x}+\psi'(c)\frac{v}{x^2}+\ldots\\ &+\chi(c)\frac{1}{x^2}+\ldots \end{aligned}\right\}=0.$$

Puisque l'on a $\varphi(c)=0$, multiplions par x tous le termes, cette équation prendra la forme

$$\left[v\varphi'(c)+\psi(c)\right]+A\frac{1}{x}+B\frac{1}{x^2}\ldots=0.$$

Quand x augmente indéfiniment, si l'une des valeurs de v tend vers une limite finie d, comme un couple de valeurs dans lequel x est très-grand et v voisin de d rend tous les termes à partir du second très-petits, on en conclut que le nombre d doit satisfaire à l'équation

$$d\,\varphi'(c)+\psi(c)=0\,;$$

d'où l'on tire pour d une valeur unique

$$(5)\quad d=-\frac{\psi(c)}{\varphi'(c)}.$$

Lorsque la valeur de c annule $\varphi'(c)$ sans annuler $\psi(c)$, aucune des valeurs de v ne tend vers une limite finie, quand x augmente indéfiniment. Si une valeur de c annule en même temps $\varphi'(c)$ et $\psi(c)$, l'équation (4), multipliée par x^2, prend la forme

$$\frac{\varphi''(c)}{1.2}v^2+\psi'(c)\,v+\chi(c)+\frac{B_1}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\ldots=0\,;$$

Dans ce cas, en général, deux valeurs de v tendent vers des limites finies, lorsque x augmente indéfiniment; ces limites sont les racines de l'équation

$$(6)\quad \frac{\varphi''(c)}{1.2}v^2+\psi'(c)v+\chi(c)=0.$$

327—Revenons à l'équation (4), et supposons que c soit

une racine simple de l'équation $\varphi(c)=0$. Le raisonnement du n° 316 prouve que lorsque v tend vers la quantité d, définie par la formule (5), sans annuler le polynôme (6), une valeur réelle de x et une seule augmente indéfiniment ; de plus cette valeur change de signe quand v passe par la valeur d. Si OC′ est la droite qui a pour équation $y=cx$, on aura $v=y-cx=$MQ, et en construisant la courbe à l'aide des coordonnées x et v, on voit que la courbe a deux branches infinies, asymptotes à la droite que l'on obtient en portant sur OY une longueur OB égale à d, et en menant par le point B une ligne CD parallèle à C′D′. Les deux branches sont dirigées vers les deux extrémités de la droite, et elles sont situées de part et d'autre de la droite. Cette droite a pour équation

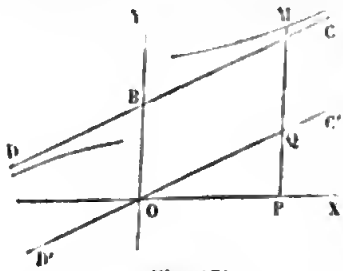


Fig. 179.

$$y_1=cx+d.$$

Ainsi *toute racine simple de l'équation* (3) *qui n'annule pas le polynôme* (6), *donne une asymptote et une seule.*

La discussion relative aux racines multiples, ou aux racines simples qui annulent le polynôme (6), demande des développements plus étendus; on reconnaît qu'une droite qui correspond à une racine pareille n'est pas toujours une asymptote de la courbe.

328—L'équation (3) est au plus du degré n par rapport à u, puisque le plus haut exposant de y dans l'équation (1) est n; à une racine simple de cette équation correspond une asymptote; à une racine double au plus deux, etc. ... ; donc la courbe a au plus n asymptotes non parallèles à l'axe des y. D'ailleurs, d'après ce qui a été vu au n° 316, la courbe a au plus $m-n$ asymptotes parallèles à la même droite. Ainsi, *une courbe de l'ordre* m *a au plus* m *asymptotes.*

329—Remarque.—Si l'on cherche les points de rencontre de l'asymptote

$$y=cx+d$$

avec la courbe, les abscisses des points sont les racines de l'équation du degré $m-2$,

$$\left[\frac{\varphi''(c)}{1.2}d^2+\psi'(c)\,d+\chi(c)\right]x^{m-2}+B_1x^{m-3}+\ldots=0.$$

Une *courbe de l'ordre* m *n'est jamais coupée par une de ses asymptotes en plus de* m—2 *points.*

330—Exemple I.— Soit la courbe

$$y^3+x^3=1,$$

déjà étudiée au n° 322.

On a $\varphi(u)=u^3+1$, $\psi(u)=0$; l'équation $\varphi(u)=0$ a une seule racine réelle -1. Les termes du degré $m-1$ manquant, on a $d=0$, et comme cette valeur de d n'annule pas le polynôme (6), il en résulte que la droite $y=-x$ est asymptote, ainsi que nous l'avons reconnu d'une autre manière.

331—Exemple II.—Soit la courbe

$$y^4-y^3x+x^3-2x^2y=0,$$

construite au n° 303. On a dans ce cas $\varphi(u)=u^4-u^3=u^3(u-1)$. L'équation $\varphi(u)=0$ a une racine triple égale à zéro et une racine simple égale à 1. Considérons la racine simple, la valeur correspondante de d est 1 ; cette valeur n'annule pas le polynôme (6) ; donc la droite

$$y=x+1$$

est asymptote de la courbe.

La racine triple ne pourrait donner que des asymptotes parallèles à OX; mais il est évident d'après l'équation de la courbe qu'aucune des valeurs de y ne tend vers une limite finie, quand x augmente indéfiniment; cette racine doit être rejetée.

332—Nous avons remarqué qu'une asymptote d'une courbe algébrique du degré m coupe la courbe au plus en $m-2$ points. Les courbes transcendantes peuvent couper leurs asymptotes en une infinité de points.

Par exemple, la courbe

$$y = \frac{3 \sin x}{x}$$

oscille indéfiniment de part et d'autre de la droite OX à laquelle elle est asmyptote, puisque la valeur de y a pour limite zéro (fig. 180). Les oscillations ont d'ailleurs une amplitude constante et égale à π.

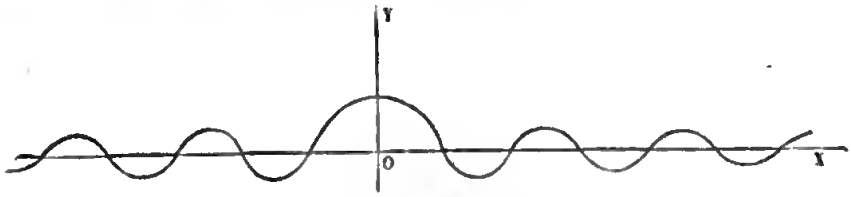


Fig. 180.

La courbe

$$y = \frac{\sin x^2}{x}.$$

oscille aussi indéfiniment de part et d'autre de son asymptote OX; mais ici l'amplitude des oscillations va en diminuant (fig. 181).

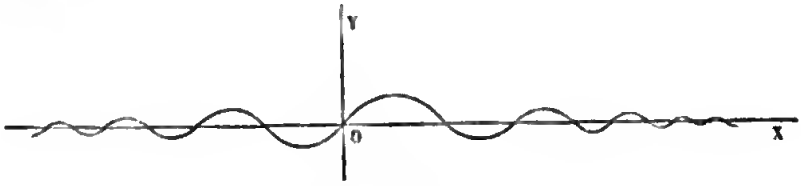


Fig. 181.

333—Il arrive quelquefois que deux branches infinies n'ont pas d'asymptote rectiligne et que cependant la différence de leurs ordonnées tend vers zéro; dans ce cas on dit que les deux courbes sont asymptotes l'une de l'autre, et si l'une d'elles est une courbe simple bien connue, on pourra s'en servir pour tracer l'autre. Reprenons l'équation

$$y = \frac{F(x)}{f(x)},$$

et supposons que le degré du numérateur surpasse de plus

d'une unité le degré du dénominateur; le rapport $\frac{y}{x}$ croissant indéfiniment avec x, les branches qui correspondent aux valeurs très-grandes de x, positives ou négatives, n'ont pas d'asymptote rectiligne. Si l'on effectue la division, on a

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + k + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

et les deux branches considérées sont asymptotes à la courbe

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots \ldots + k.$$

Quand $n=2$, cette seconde courbe est une parabole. Par exemple la courbe

$$y = \frac{x^2+1}{x} = x^2 + \frac{1}{x}$$

est asymptote à la parabole $y=x^2$ (fig. 182).

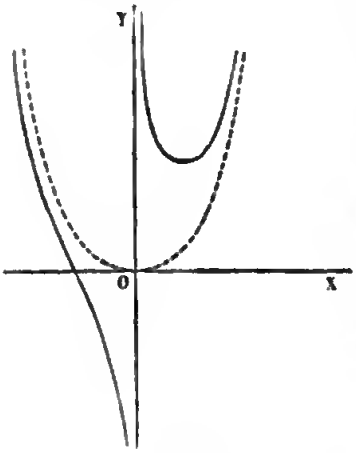


Fig. 182.

CHAPITRE IV.

Construction des Courbes en Coordonnées polaires.

334—Nous avons défini les coordonnées polaires au n° 3; dans ce système un point quelconque, pris isolément dans le plan, peut être déterminé par une valeur de ω comprise entre 0 et 2π, et par une valeur positive de ρ; cependant on est conduit, ainsi que nous allons l'expliquer par divers exemples, à faire varier chacune des coordonnées ω et ρ de $-\infty$ à $+\infty$.

1° *Hyperbole.* Nous avons vu que, l'un des foyers de l'hyperbole étant pris pour pôle, les deux branches sont représentées par deux équations distinctes, quand on se borne aux rayons vecteurs positifs; mais que l'une des équations suffit, si l'on admet les rayons vecteurs négatifs, en convenant de porter la

valeur absolue de chacun d'eux dans la direction opposée de celle qu'indique la valeur de ω.

2° *Limaçon de Pascal.* Nous avons démontré (n° 35) que la courbe est représentée par les deux équations $\rho = a \cos \omega \pm b$, quand on fait varier ω de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ et que l'on admet les valeurs négatives de ρ ; mais il est facile de voir que la première équation suffit pour représenter toute la courbe. Considérons, en effet, un point M′ de la seconde branche dont les coordonnées ρ' et ω' vérifient l'équation $\rho' = a \cos \omega' - b$; si dans la première équation on remplace ω par $\omega' + \pi$, on a $\rho = -a \cos \omega' + b = -\rho'$, ce qui montre qu'en portant la valeur de ρ dans le sens convenable, on obtient le point M′. Ainsi la première équation, dans laquelle on fait varier ω de 0 à 2π, représente toute la courbe.

3° *Spirale d'Archimède.* Un point M se meut d'un mouvement uniforme et dans le sens G′G sur une droite indéfinie G′OG, laquelle tourne elle-même d'un mouvement uniforme autour de l'un de ses points O, la courbe décrite par le point M est la spirale d'Archimède.

Prenons pour axe polaire la position OX, occupée par la droite OG lorsque le mobile M passe en O, et comptons les angles polaires positivement dans le sens du mouvement de G′OG ; soit a la longueur dont le mobile s'avance sur la droite, pendant que celle-ci fait une révolution entière. Si l'on considère le mobile dans l'une quelconque de ses positions après son passage en O, en appelant ω l'angle dont a tourné la direction OG à partir de OX, et ρ la distance du mobile du point O, on a

$$(1) \quad \frac{\rho}{a} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \text{ou} \quad \rho = a\,\frac{\omega}{2\pi} = b\omega,$$

en posant $\frac{a}{2\pi} = b$.

Considérons le mobile avant son passage en O, appelons ω_1 la valeur absolue de l'angle dont il faut faire tourner la direction OG pour que le mobile vienne en O, le point M

étant placé sur la direction OG′, opposée à celle qui correspond à l'angle ω_1, le rayon vecteur de ce point est négatif et l'on a

$$\frac{-\rho}{a}=\frac{\omega_1}{2\pi}.$$

Si l'on convient également de regarder les angles polaires, comptés dans un sens opposé au premier, comme négatifs, on aura $\omega=-\omega_1$, et la relation précédente coïncide avec l'équation (1) qui représente la courbe indéfinie. Les valeurs de ω comprises entre 0 et 2π, 2π et 4π..., 0 et -2π..., donnent les spires successives. Si l'on se bornait aux valeurs positives de ρ et aux valeurs de ω comprises entre 0 et 2π, il faudrait une équation particulière pour représenter chacune des spires,

$$\rho=b\omega,\ \rho=a+b\omega,\ldots\qquad \rho=a-b\omega,\ \rho=2a-b\omega,\ldots$$

La spirale d'Archimède se compose de deux parties $OB_1C_1D_1A_1B_2$.... et $OB_1E_1D_1F_1B_2$.... (fig. 183) symétriques l'une de l'autre par rapport à la perpendiculaire OY à l'axe polaire. Chaque partie comprend une infinité de spires, et les portions d'une droite quelconque menée par le pôle et comprises entre deux spires consécutives ont toutes pour longueur a.

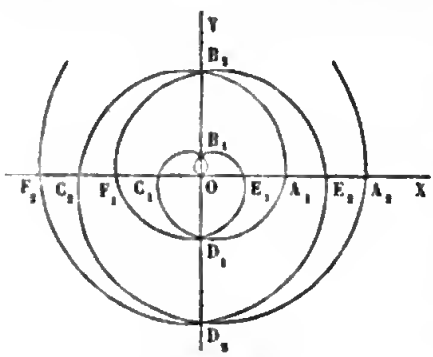


Fig. 183.

335—Remarque I.—Un même point M du plan peut être défini par une infinité de couples de valeurs de ρ et de ω. Si l'on appelle α l'angle positif moindre que 2π que fait la direction OM avec l'axe OX et a la distance OM (fig. 184), on peut prendre pour coordonnées du point M, les couples de valeurs,

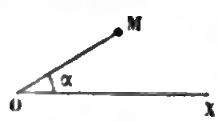


Fig. 184.

$$\ldots[-4\pi+\alpha,a],\ [-2\pi+\alpha,a].\ [\alpha,a],\ [2\pi+\alpha,a],\ [4\pi+\alpha,a],\ldots$$

dans lesquels le rayon vecteur est positif, ou les couples.

$[-3\pi+\alpha,-a],[-\pi+\alpha,-a],[\pi+\alpha,-a],[3\pi+\alpha,-a],[5\pi+\alpha,-a]$ dans lesquels le rayon vecteur est négatif.

Lorsque le point M appartient à une courbe définie par une équation

$$f(\omega, \rho)=0,$$

ses coordonnées, quoique bien déterminées, ne peuvent être indiquées à la seule inspection du point; il faut, pour les obtenir, suivre le tracé de la courbe.

336—Remarque II.—Dans les formules de transformation établies au livre I, chapitre III, nous avons supposé le point M déterminé par un rayon vecteur positif et par un angle polaire compris entre 0 et 2π. Conservant d'abord le rayon vecteur positif, on peut prendre pour angle polaire l'un quelconque des angles que forme la direction OM avec OX (fig. 185), angle compté positivement en tournant de OX vers OY, et négativement dans le sens opposé; ceci revient à augmenter ou à diminuer l'angle désigné primitivement par ω d'un multiple de 2π; le sinus et le cosinus ne changeant pas, les formules restent les mêmes. Supposons maintenant le point M défini par un rayon vecteur négatif, l'angle ω sera l'un des angles formés par la direction OM′ avec OX. La projection de OM sur OX est $(-\rho)\times\cos(\pi+\omega)$ ou $\rho\cos\omega$; ainsi on a encore $x=\rho\cos\omega$, et de même $x=\rho\sin\omega$. Les formules sont générales.

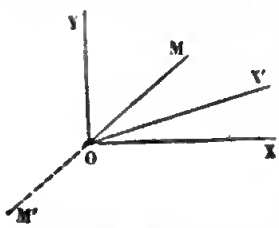


Fig. 185.

Lorsque l'axe polaire OX′ ne coïncide pas avec OX, on définit la position de OX′ en donnant l'angle de OX′ avec OX, angle compté en tournant de OX vers OY, soit α cet angle. Si l'on considère l'axe polaire auxiliaire OX, on aura les formules

$$x=\rho\cos\omega,$$
$$y=\rho\sin\omega.$$

On a de plus $\omega=\omega'+\alpha$; d'où

$$x=\rho\cos(\omega'+\alpha),$$
$$y=\rho\sin(\omega'+\alpha).$$

Supposons les axes des coordonnées obliques, et prenons OX

pour axe polaire, on obtient les formules de transformation en projetant les deux chemins OM et OPM successivement sur une perpendiculaire à OX et sur une perpendiculaire à OY ; on trouve ainsi

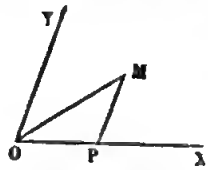


Fig. 186.

$$x = \frac{\rho \sin(\theta - \omega)}{\sin \theta},$$

$$y = \frac{\rho \sin \omega}{\sin \theta},$$

θ étant l'angle YOX.

337—Remarque III.—Dans le cas où l'on obtient toute la courbe en faisant varier ω de 0 à 2π, on reconnaît la symétrie par rapport à l'axe polaire OX, quand les valeurs α et $2\pi - \alpha$ attribuées à ω reproduisent la même valeur de ρ, ou quand les valeurs α et $\pi - \alpha$ donnent des valeurs de ρ égales et de signes contraires. On reconnaît de même la symétrie par rapport à la perpendiculaire OY, quand les angles α et $\pi - \alpha$ donnent la même valeur de ρ, ou les angles α et $2\pi - \alpha$ des valeurs égales et de signes contraires. Enfin, on reconnaît la symétrie par rapport au pôle, quand les angles α et $\pi + \alpha$ donnent la même valeur de ρ.

Mais lorsque, pour avoir toute la courbe, il est nécessaire de faire varier ω au delà de 2π, la symétrie peut se présenter d'une autre manière. Par exemple, s'il est nécessaire de faire varier ω de 0 à 4π, la symétrie par rapport à l axe polaire aura lieu si les angles α et $2\pi - \alpha$, ou α et $4\pi - \alpha$, donnent des valeurs égales pour ρ, ou si les angles α et $\pi - \alpha$, ou α et $3\pi - \alpha$, donnent des valeurs de ρ égales et de signes contraires. Si les limites de ω sont plus étendues, le nombre des comparaisons à faire augmente.

Considérons, par exemple, la courbe définie par l'équation

$$\rho = \cos \frac{\omega}{2}.$$

Quand ω augmente de deux fois 2π, la direction du rayon redevient la même ; d'ailleurs, $\frac{\omega}{2}$ augmentant de 2π, ρ reprend

la même valeur ; ainsi on retrouve un point déjà obtenu antérieurement. Il suffit donc de faire varier ω de 0 à 4π. Si l'on augmente ω de 2π, le rayon revient à la même direction ; mais $\frac{\omega}{2}$ augmentant seulement de π, ρ conserve la même valeur numérique en changeant de signe. On en conclut que la portion du lieu donnée par les valeurs de ω comprises entre 2π et 4π est symétrique par rapport au pôle de la partie donnée par les valeurs de ω comprises entre 0 et 2π ; en d'autres termes, le pôle est centre de la courbe. Pour $\omega=\alpha$ et $\omega=2\pi-\alpha$, les valeurs de ρ sont égales et de signes contraires ; on a de la sorte deux points placés symétriquement par rapport à la perpendiculaire OY à l'axe polaire (fig. 187) ; cette droite OY est un axe de la courbe. La variable ω allant de 0 à π, ρ diminue de 1 à 0, on a l'arc ABO tangent au point O à la droite OX'. Les valeurs de ω comprises entre π et 2π donnent l'arc OBA' symétrique du premier par rapport à OY, et les valeurs de ω comprises entre 2π et 4π, la courbe A'B'OB'A symétrique de ABOBA' par rapport au pôle. La courbe est formée de quatre arcs égaux. L'axe polaire est aussi un axe de la courbe, ce qu'on voit directement en remarquant que l'on a des valeurs égales de ρ pour les valeurs α et $4\pi-\alpha$ attribuées à ω.

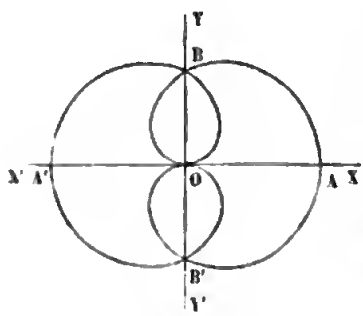


Fig. 187.

TANGENTE.

338—On détermine la direction MT de la tangente au point M par l'angle α qu'elle fait avec la prolongement MA du rayon vecteur.

Soient ρ et ω les cordonnées du point M, $\rho+\Delta\rho$ et $\omega+\Delta\omega$ celles d'un point voisin M' (fig. 188) ; menons la sécante MM', et du pôle comme centre avec OM pour rayon décrivons l'arc de cercle MN ; l'angle MOM' est l'accroissement $\Delta\omega$ de l'angle polaire,

M'N est l'accroissement $\Delta\rho$ du rayon vecteur. Dans le triangle NMM', on a

$$\frac{\sin \mathrm{OM'M}}{\sin \mathrm{NMM'}} = \frac{\text{corde MN}}{\mathrm{M'N}} = \frac{\text{corde MN}}{\text{arc MN}} \times \frac{\text{arc MN}}{\mathrm{M'N}} = \frac{\text{corde MN}}{\text{arc MN}} \times \frac{\rho\Delta\omega}{\Delta\rho}.$$

Si l'on fait tourner la sécante autour du point M, de manière que le point M' se rapproche indéfiniment du point M, la sécante MM' a pour limite la tangente MT, la corde MN a pour limite la tangente à l'arc de cercle, et par suite la perpendiculaire au rayon OA ; on a donc

$$\lim \mathrm{OM'M} = \mathrm{OMT'} = \alpha, \quad \lim \mathrm{NMM'} = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

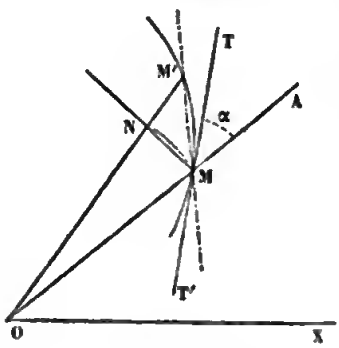


Fig. 188.

on sait d'ailleurs que la limite du rapport d'un arc de cercle à sa corde est l'unité ; l'équation précédente devient ainsi

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \rho \lim \frac{\Delta\omega}{\Delta\rho},$$

ou

$$\tang\alpha = \frac{\rho}{\lim \frac{\Delta\rho}{\Delta\omega}} = \frac{\rho}{\rho'},$$

ρ' désignant la dérivée de ρ considéré comme fonction de ω.

On a supposé dans la figure précédente que le rayon vecteur croît avec l'angle ω; s'il décroît, le triangle NMM' (fig. 189) donne

$$\frac{\sin \mathrm{OM'M}}{-\sin \mathrm{NMM'}} = \frac{\text{corde MN}}{\text{arc MN}} \times \frac{\text{arc MN}}{-\mathrm{M'N}} = \frac{\text{corde MN}}{\text{arc MN}} \times \frac{\rho\Delta\omega}{\Delta\rho};$$

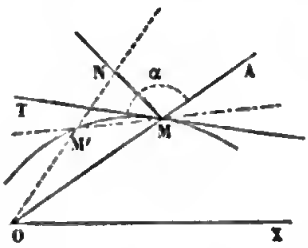


Fig. 189.

les angles OM'M, NMM' ayant pour limites α et $\alpha - \frac{\pi}{2}$; on retrouve encore la même formule.

Quand ω croît, on s'avance sur la courbe dans un certain sens; α désigne l'angle que fait la tangente menée dans le sens du mouvement avec la direction déterminée par l'angle ω. On voit aussi que la même formule convient au cas où le rayon vecteur est négatif.

339—Remarque.—Lorsque le rayon vecteur s'annule pour une valeur particulière ω_0 de ω, on a une branche de courbe OC passant au pôle, et la tangente à cette branche au pôle est précisément la droite OA donnée par l'angle ω_0. En effet, si l'on prend un point voisin M, et si l'on fait tourner la sécante OM de manière que le point M se rapproche du point O, ρ s'annule et la sécante tend vers la direction OA.

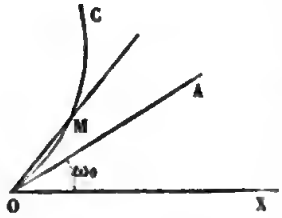


Fig. 190.

340—Exemple I.—*Spirale d'Archimède.* — L'équation de cette courbe étant $\rho = b\omega$, on en déduit $\rho' = b$, d'où

$$tang\,\alpha = \frac{\rho}{b} = \frac{b\omega}{b} = \omega.$$

Si le point M part du pôle et s'avance sur la courbe, l'angle ω d'abord nul, augmente constamment et tend vers un angle droit.

341—Exemple II.—*Spirale logarithmique.* — On appelle spirale logarithmique la courbe dont l'équation polaire est

$$\rho = a\,e^{m\omega},$$

a désignant une ligne donnée et m un nombre. Supposons la constante m positive; si l'on fait croître ω de 0 à l'infini, ρ va constamment en croissant de a à l'infini, ce qui donne une branche indéfinie ABC...., faisant une infinité de circonvolutions autour du pôle. Si l'on fait ensuite varier ω de 0 à $-\infty$, ρ diminue constamment et tend vers zéro, on obtient une seconde branche indéfinie AB'C'... qui fait une infinité de circonvolutions autour du pôle, en se rapprochant constamment de ce point. Lorsque la constante m est négative, les valeurs positives de ω donnent la branche qui se rapproche du pôle, et les valeurs négatives celle qui s'en éloigne.

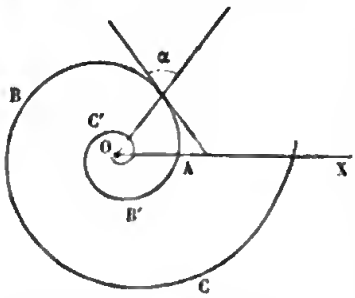


Fig. 191.

On a $\rho' = mae^{m\omega} = m\rho$; il en résulte $tang\,\alpha = \frac{1}{m}$.

La tangente à la courbe fait avec le rayon vecteur un angle constant.

342—Exemple III.—*Épicycloïde.*—Lorsqu'un cercle mobile roule, sans glisser, sur un cercle fixe, un point du cercle mobile décrit dans le plan une courbe à laquelle on a donné le nom d'*épicycloïde.*

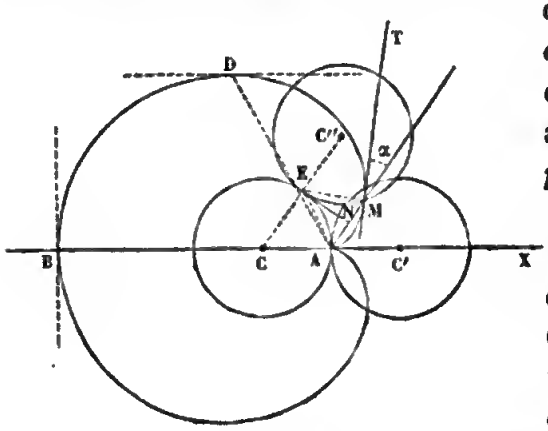


Fig. 192.

Bornons-nous au cas où les deux cercles sont égaux. Soit C le cercle fixe, C' la position initiale du cercle mobile, a le rayon; supposons que ce soit le point de contact A qui, dans le mouvement du cercle C', engendre l'épicycloïde. Lorsque le cercle mobile a roulé de l'arc AE, le point A est venu en M; les deux arcs EA, EM sont égaux. Prenons le point A pour pôle, le prolongement de CA pour axe polaire; la droite AM, perpendiculaire sur la tangente commune aux deux cercles, est parallèle à CE; l'angle AEN est la moitié de ACE, et par conséquent la moitié de ω; le triangle rectangle ANE donne

$$AN = AE \sin\frac{\omega}{2};$$

mais

$$AE = 2a \sin\frac{\omega}{2};$$

donc

$$\rho = 4a \sin^2\frac{\omega}{2} = 2a(1 - \cos\omega).$$

Telle est l'équation de l'épicycloïde.

Il suffit de donner à ω les valeurs comprises entre 0 et 2π. Quand ω varie de 0 à π, ρ croît de 0 à $4a$, ce qui donne l'arc ADB. Pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = 2\pi - \omega_1$, les valeurs de ρ sont égales; donc, en faisant varier ω de π à 2π, on obtient un arc symétrique du premier par rapport à l'axe polaire, et par conséquent l'axe polaire est axe de la courbe.

Puisque la dérivée de $\cos\omega$ est égale à $-\sin\omega$, la dérivée de ρ, considérée comme une fonction de ω, est égale à

$$2a \sin\omega.$$

On a donc

$$\tang\alpha = \frac{\rho}{2a\sin\omega} = \tang\frac{\omega}{2},$$

ou

$$\alpha = \frac{\omega}{2}.$$

Du point A au point B, α croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$; en B la tangente est perpendiculaire sur le rayon vecteur. Il est aisé de voir que la normale à l'épicycloïde en un point quelconque M passe au point de contact du cercle mobile avec le cercle fixe; en effet l'angle MEN est égal à $\frac{\omega}{2}$ et par suite à α; donc EM est perpendiculaire sur MT.

343—Exemple IV.—*Construction de la courbe*

$$\rho = 4 + \cos 5\omega.$$

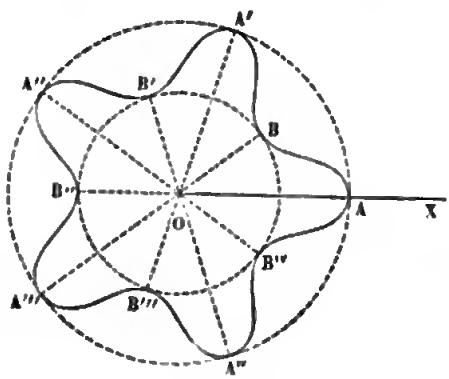


Fig. 193.

Il suffit de faire varier ω de 0 à 2π. Le rayon vecteur ρ reste toujours compris entre 3 et 5; décrivons donc du pôle comme centre deux cercles avec les rayons 3 et 5, la courbe sera tout entière située entre ces deux cercles. Quand ω varie de 0 à $\frac{\pi}{5}$, ρ diminue de 5 à 3,

ce qui donne l'arc AB. Quand ω varie de $\frac{\pi}{5}$ à $\frac{2\pi}{5}$, ρ augmente de 3 à 5, ce qui donne l'arc BA′ symétrique du premier par rapport à la ligne OB. L'angle 5ω a varié de la sorte de 0 à 2π. Si l'on fait varier ω de $\frac{2\pi}{5}$ à $\frac{4\pi}{5}$, l'angle 5ω variera de 2π à 4π, et les mêmes valeurs de ρ se reproduiront dans le même ordre; on obtiendra donc un second arc A′B′A″ égal au premier, puis un troisième, et ainsi de suite. Après le cinquième arc, on reviendra au point de départ.

En prenant la dérivée, on trouve

$$tang\ \alpha = \frac{\rho}{5 sin\ 5\omega}.$$

Aux points A et B, $sin\ 5\omega = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

344—Exemple V.—Les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites rectangulaires OX, OY; d'un point fixe I, situé sur la bissectrice, on abaisse une perpendiculaire sur la droite mobile; trouver le lieu du pied de cette perpendiculaire (fig. 194).

Construction géométrique.—Il est évident que le lieu sera symétrique par rapport à la bissectrice OI. Plaçons d'abord la droite mobile dans la position PQ perpendiculaire sur la bissectrice, on a le point A du lieu. Faisons glisser la droite de manière à ce que l'extrémité Q descende sur l'axe des y; dans une certaine position P′Q′, la droite passera par le point I qui, de la sorte, appartient au lieu; on a ainsi l'arc AEI, dont la tangente en I est perpendiculaire sur P′Q′. L'extrémité Q′ continuant à descendre, la droite vient s'appliquer sur OX, et l'on a l'arc IFC qui passe au point C, pied de la perpendiculaire abaissée du point I sur OX. L'extrémité Q glisse sur OY′, la courbe passe au-dessous de OX; mais la droite arrive dans une position P″Q″ telle que l'angle IP″Q″ est droit, ce qui donne le point P″ du lieu; on a ainsi l'arc CGP″. Si l'extrémité Q″ continue à descendre, la courbe revient au-dessus de OX; bien-

tôt, dans la position $P'''Q'''$, la droite prolongée passe en I ; on a ainsi l'arc $P'''I$ dont la tangente en I est perpendiculaire sur $P'''Q'''$.

L'extrémité P''' continuant à se rapprocher de O, la droite s'applique sur OY' et l'on obtient l'arc IHD, qui passe par le point D, pied de la perpendiculaire abaissée du point I sur OY. L'extrémité P''' glisse sur OX', et la droite arrive dans une position $P^{iv}Q^{iv}$ telle que l'angle $IP^{iv}Q^{iv}$ est droit ; le point P^{iv} ap-

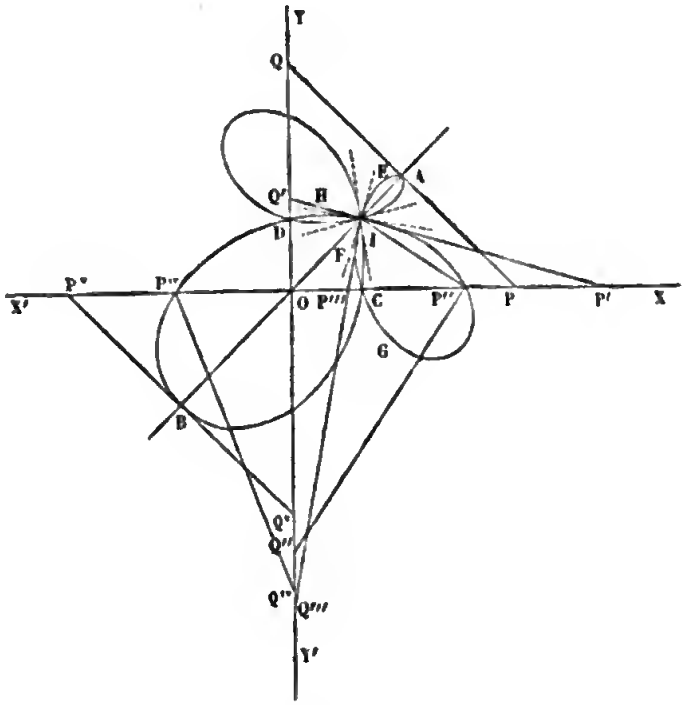


Fig. 194.

partient au lieu, et l'on a l'arc DP^{iv}. Ensuite la droite, dans la position Q^vP^v, devient perpendiculaire sur la bissectrice OB, ce qui donne l'arc $P^{iv}B$.

Si, revenant à la position primitive PQ, on fait mouvoir la droite en sens inverse jusqu'à la position finale P^vQ^v, il est clair qu'on obtiendra une portion de courbe symétrique par rapport à AB de celle obtenue précédemment.

Prenons OX, OY, pour axes des coordonnées, appelons $2a$

la longueur constante de la droite mobile, b les coordonnées égales du point I, p et q les distances variables de l'origine aux extrémités de la droite mobile, x et y les coordonnées d'un point quelconque du lieu. Puisqu'un point du lieu est l'intersection de la droite mobile avec la perpendiculaire abaissée du point I, ce point est donné par les équations de ces deux droites

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1,$$

$$p(x-b)=q(y-b);$$

on a d'ailleurs la relation

$$p^2+q^2=4a^2.$$

Si entre ces trois équations on élimine les quantités variables p, q, on obtient l'équation du lieu

$$(1)\ [x(x-b)+y(y-b)]^2[(x-b)^2+(y-b)^2]-4a^2(x-b)^2(y-b)^2=0.$$

La courbe est du sixième degré.

Quand on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point I, cette équation se simplifie et devient

$$(2)\ [x^2+y^2+b(x+y)]^2(x^2+y^2)-4a^2x^2y^2=0.$$

La courbe ayant pour axe de symétrie la bissectrice de l'angle YOX, si l'on fait tourner les axes de 45°, l'équation (2) se réduit à

$$(3)\ (x^2+y^2+cx)^2(x^2+y^2)-a^2(x^2-y^2)^2=0;$$

c désignant la distance OI.

Enfin si l'on prend pour axe polaire la droite IA prolongement de OI, celle-ci devient

$$(\rho+c\cos\omega)^2-a^2\cos^2 2\omega=0,$$

d'où

$$(4)\ \rho=-c\cos\omega+a\cos 2\omega.$$

On peut rejeter le signe —, et la courbe se construit facilement au moyen de cette équation.

ASYMPTOTES.

345—Considérons une branche infinie, asymptote à la droite CD; si l'on joint le pôle à un point M de la courbe, et si l'on suppose que le point M s'éloigne indéfiniment sur la courbe, la direction OM aura pour limite la direction OL de l'asymptote.

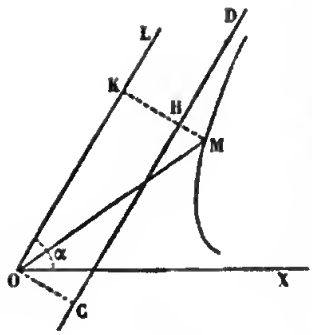


Fig. 195.

Ainsi, *lorsque le rayon vecteur* ρ *devient infini pour une valeur particulière* α *de* ω, *si la branche infinie ainsi obtenue a une asymptote, cette asymptote est parallèle à la direction déterminée par l'angle* α *qui rend* ρ *infini.*

Pour avoir la distance OC de l'asymptote à la droite OL, du point M de la courbe abaissons une perpendiculaire MK à cette droite ; le triangle rectangle MOK donne

$$MK = MO \sin KOM = \rho \sin(\alpha - \omega).$$

Si le produit $\rho \sin(\alpha - \omega)$ ne tend vers aucune limite, la branche infinie n'a pas d'asymptote. Si, au contraire, ce produit tend vers une limite finie d, la branche de courbe admet pour asymptote la droite CD, située à la distance d du rayon OL ; car la distance MK ayant pour limite d, la distance MH aura pour limite zéro.

Lorsqu'on obtient la branche infinie en faisant croître ω vers α, il est évident que, si cette branche a une asymptote, l'asymptote sera placée par rapport à OL, comme l'indique la figure. Si l'on obtenait la branche infinie en faisant diminuer ω vers α, l'asymptote serait placée de l'autre côté de OL et sa distance à OL serait la limite du produit $\rho \sin(\omega - \alpha)$.

Nous avons supposé la branche de courbe donnée par un rayon vecteur positif ; si elle était donnée par un rayon vecteur négatif, on aurait, dans le premier cas $MK = -\rho \sin(\alpha - \omega)$, dans le second $MK = -\rho \sin(\omega - \alpha)$.

346—Exemple VI.—*Construire la courbe*

$$\rho = \frac{\cos 2\omega}{\sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Il est d'abord évident qu'il suffit de faire varier ω de 0 à 2π. Lorsque ω augmente de π, on obtient une direction opposée à la première, le numérateur de ρ ne change pas, le dénominateur

change de signe en conservant la même valeur, donc ρ change de signe et conserve la même valeur numérique ; il en résulte que la valeur $\alpha+\pi$ de ω donne le même point que la valeur α ; il suffit donc de faire varier ω de 0 à π. Cherchons les valeurs de ω, comprises entre ces limites pour lesquelles ρ change de signe. Le numérateur s'annule et change de signe pour les valeurs

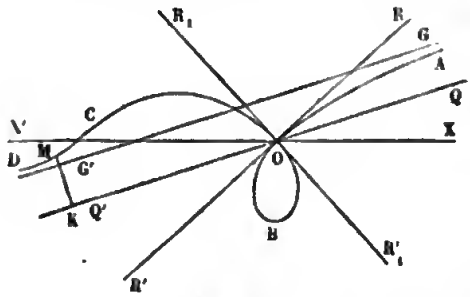


Fig. 196.

$\omega=\frac{\pi}{4}$, $\omega=3\frac{\pi}{4}$; le diviseur s'annule et change de signe pour $\omega=\frac{\pi}{6}$. Disposons ces angles par ordre de grandeur, on a la suite $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $3\frac{\pi}{4}$.

Soient OQ, OR, OR_1 les directions qui correspondent aux angles $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $3\frac{\pi}{4}$; quand ω varie de 0 à $\frac{\pi}{6}$, ρ reste négatif; il est d'abord égal à -2 et augmente indéfiniment, ce qui donne la branche infinie CD, comprise dans l'angle X'OQ'. La variable ω allant de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{\pi}{4}$, ρ devient positif; il est d'abord très-grand et tend vers zéro, on obtient une nouvelle branche infinie AO, comprise dans l'angle QOR. Faisons varier ω de $\frac{\pi}{4}$ à $3\frac{\pi}{4}$, ρ reste négatif, il est d'abord nul et redevient égal à zéro; on obtient de la sorte la boucle OBO. Enfin, ω variant de $3\frac{\pi}{4}$ à π, ρ est positif et varie de 0 à 2, ce qui donne l'arc OC.

Cherchons si les branches infinies ont des asymptotes. On a, pour un point de l'une des branches CD ou AO,

$$MK=\rho \sin\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2\omega;$$

lorsque ω tend vers $\frac{\pi}{6}$, MK tend vers $\cos\frac{\pi}{3}$ ou vers $\frac{1}{2}$; ainsi il

y a une asymptote placée à la distance $\frac{1}{2}$ de Q'Q. De plus, lorsque ω croît de 0 à $\frac{\pi}{6}$, $\cos 2\omega$ décroît constamment; donc l'arc CD est situé en dehors de la partie du plan comprise entre l'asymptote et la parallèle QQ'. De même, lorsque ω décroît de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{6}$, $\cos 2\omega$ augmente et l'on voit que l'arc OA est compris entre les deux droites.

347—Exemple VII.—*Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné* P *aux diverses courbes du second degré ayant pour foyers deux points donnés* F *et* F'.

Prenons pour axes la droite F'F et la pependiculaire élevée à cette droite en son point milieu ; l'équation générale des coniques ayant pour foyers les points F et F' est

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1,$$

c désignant la distance OF et a un paramètre variable; lorsque a est plus grand que c, la courbe est une ellipse, et lorsque a est plus petit que c (fig. 197), c'est une hyperbole. Soient α, β les coordonnées du point donné P; l'équation de la corde des contacts des tangentes menées du point P à la conique (1) est

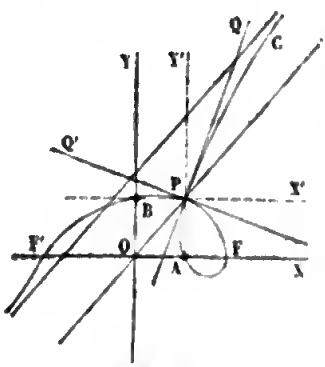


Fig. 197.

$$(2)\quad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{a^2-c^2}=1.$$

On obtient l'équation du lieu en éliminant le paramètre a entre les équations (1) et (2). Si l'on retranche ces équations membre à membre, il vient

$$\frac{x^2-\alpha x}{a^2}-\frac{y^2-\beta y}{a^2-c^2}=0;$$

d'où

$$a^2 = \frac{c^2(x^2 - \alpha x)}{x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y}, \quad a^2 - c^2 = \frac{-c^2(y^2 - \beta y)}{x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y};$$

en substituant dans l'équation (1), on obtient l'équation du lieu

$$(3)\ (x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y)\left[\beta x - \alpha y\right] + c^2(x - \alpha)(y - \beta) = 0.$$

Le lieu est du troisième degré, il passe par le point donné P, par les foyers F, F′, et par les projections du point P sur les deux droites OX, OY.

En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au point P, l'équation du lieu devient

$$(4)\ (x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y)(\beta x - \alpha y) + c^2 xy = 0.$$

Si l'on transforme celle-ci en coordonnées polaires, en prenant pour pôle le point P, et la droite PX′ pour axe polaire, on a

$$(5)\ \rho = \frac{(\beta^2 - \alpha^2 + c^2)\sin\omega\cos\omega - \alpha\beta(\sin^2\omega - \cos^2\omega)}{\alpha\sin\omega - \beta\cos\omega}.$$

On obtient tous les points du lieu en faisant varier ω de 0 à π. Le dénominateur s'annule pour la valeur μ de ω déterminée par la formule $\tang\mu = \frac{\beta}{\alpha}$; cette valeur donne la droite qui va du point P à l'ancienne origine O. Si l'on égale le numérateur à zéro, en divisant par $\cos^2\omega$, on a une équation du second degré par rapport à $\tang\omega$; les deux racines sont réelles et déterminent deux droites rectangulaires. Comme le résultat de la substitution de $\frac{\beta}{\alpha}$ à la place de $\tang\omega$ dans le premier membre de l'équation

$$\alpha\beta\tang^2\omega - (\beta^2 - \alpha^2 + c^2)\tang\omega - \alpha\beta = 0$$

est négatif (on suppose α et β positifs), la racine positive est plus grande que $\frac{\beta}{\alpha}$; par conséquent les droites PQ, PQ′, qui correspondent aux valeurs λ, λ' de ω qui annulent le numérateur, et la droite PO sont disposées, comme l'indique la figure.

Lorsque ω varie de 0 à μ, ρ est négatif, on a la branche infinie BF′; de μ à λ, ρ est positif, on a la branche infinie CP; de

λ à λ', ρ est négatif et l'on obtient la boucle PAFP ; enfin, de λ' à π, ρ redevient positif et l'on trouve l'arc PB. Les branches infinies ont une asymptote dont la distance à OP est

$$\frac{c^2 \alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En changeant la direction de l'axe polaire, on ramène facilement l'équation (5) à la forme

$$\rho = a\frac{\cos 2\omega}{\sin(\omega-\omega_1)},$$

discutée dans l'exemple précédent.

348—Exemple VIII.—*Construire la courbe donnée par l'équation*

$$\rho = a\frac{2\omega}{2\omega-1} = a\frac{1}{1-\frac{1}{2\omega}}.$$

La valeur de ρ s'annule pour $\omega=0$, et devient infinie pour $\omega=\frac{1}{2}$; menons par le pôle la droite L'L, qui fait avec l'axe polaire l'angle dont la mesure est $\frac{1}{2}$. Lorsque ω varie de 0 à $\frac{1}{2}$, ρ est négatif et varie de 0 à $-\infty$, on a une branche infinie OA'B', tangente à l'axe polaire et comprise dans l'angle X'OL'. Quand ω dépasse $\frac{1}{2}$ et croît de $\frac{1}{2}$ à ∞, ρ devient positif et décroît de ∞ à a, on obtient ainsi une première branche infinie AB, puis une seconde AE qui fait une infinité de circonvolutions autour du cercle décrit du pôle comme centre, avec a pour rayon, en se rapprochant constamment du cercle.

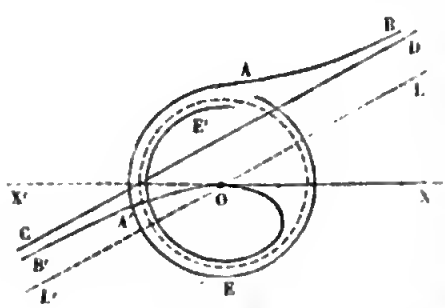


Fig. 198.

Quand ω varie de 0 à $-\infty$, ρ reste positif et va en croissant de

0 à a, ce qui donne la branche OE′ intérieure au cercle qui fait une infinité de circonvolutions en se rapprochant constamment du cercle.

Considérons l'une des branches infinies A′B′, AB, la distance d'un point de l'une de ces branches à la droite L′L est donnée par la formule

$$\rho \sin\left(\omega - \frac{1}{2}\right) = a\omega \frac{\sin\left(\omega - \frac{1}{2}\right)}{\omega - \frac{1}{2}};$$

la limite de cette expression, lorsque ω tend vers $\frac{1}{2}$, est $\frac{a}{2}$.

Les deux branches A′B′, AB ont pour asymptote la droite CD, distante de L′L de $\frac{a}{2}$.

349—Exemple IX.—*Hyperbole*. L'équation polaire de cette courbe est (nº 260)

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega},$$

dans laquelle e est plus grand que 1. Soit α l'angle dont le cosinus est $-\frac{1}{e}$; quand ω croît de 0 à α, ρ croît de $\frac{p}{1+e}$ à ∞, on a la branche A′E′; ω allant de α à π, ρ devient négatif et varie de $-\infty$ à $-\frac{p}{1-e}$, on a la branche E′A′. Les valeurs de ω, comprises entre π et 2π, donnent deux branches symétriques des précédentes par rapport à l'axe polaire. La distance MK d'un point de l'une des branches AE, A′E′ à la droite OL est

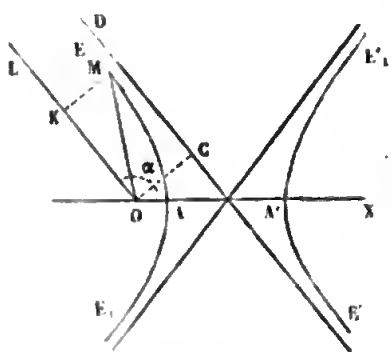


Fig. 199.

$$MK = \frac{p \sin(\alpha - \omega)}{1 + e \cos \omega} = \frac{p \sin(\alpha - \omega)}{e(\cos \omega - \cos \alpha)} = \frac{p \cos \frac{1}{2}(\alpha - \omega)}{e \sin \frac{1}{2}(\alpha + \omega)}.$$

Cette distance a pour limite

$$OC = \frac{p}{e \sin \alpha} = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}.$$

On obtient ainsi l'asymptote CD. Les deux autres branches ont pour asymptote la droite symétrique de CD par rapport à l'axe polaire.

On voit immédiatement la position de la branche AE par rapport à son asymptote, car lorsque ω tend vers α en croissant, le numérateur dans l'expression de MK va en croissant, tandis que le dénominateur va en décroissant; la distance MK va donc en augmentant, et par conséquent la branche AE est située entre l'asymptote et la parallèle OL. On ne voit pas aussi facilement la position de la branche A'E'; car lorsque ω tend vers α en décroissant, les deux termes de la fraction augmentent et on ne sait pas immédiatement dans quel sens celle-ci varie. Appelons δ la différence entre la perpendiculaire MK et sa limite, on a

$$\delta = \frac{p \cos \frac{1}{2}(\alpha - \omega)}{e \sin \frac{1}{2}(\alpha + \omega)} - \frac{p}{e \sin \alpha} = \frac{p \sin \frac{1}{2}(\omega - \alpha)}{e^2 \sin \alpha \sin \frac{1}{2}(\omega + \alpha)}.$$

Quand ω est plus grand que α, la différence δ est positive, et par conséquent la branche A'E' est située en dehors de la partie du plan comprise entre l'asymptote et la parallèle.

350—Exemple X.—*Construire la courbe*

$$\rho = 1 \pm \sqrt{\frac{2 \sin \omega - 1}{\sin \omega}}.$$

Le rayon vecteur reprenant la même valeur quand on augmente ω de de 2π, il suffit de faire varier ω de 0 à 2π. Pour que le rayon vecteur soit réel, il faut que la fraction placée

sous le radical soit positive. Le numérateur change de signe pour les valeurs $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ attribuées à ω, le dénominateur pour les valeurs 0 et π; en rangeant les angles par ordre de grandeur

$$0, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \pi, \quad 2\pi,$$

on voit que la quantité placée sous le radical est négative de 0 à $\frac{\pi}{6}$, positive de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{5\pi}{6}$, négative de $\frac{5\pi}{6}$ à π, positive de π à 2π; on obtiendra donc toute la courbe, en faisant varier ω de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{5\pi}{6}$, et de π à 2π. On remarque d'ailleurs que les valeurs supplémentaires de ω reproduisant les mêmes valeurs de ρ, la courbe est symétrique par rapport à la perpendiculaire OY à l'axe polaire OX (fig. 200).

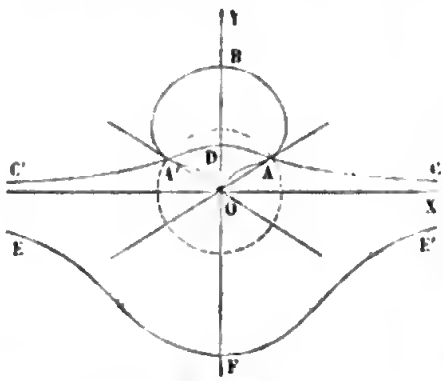


Fig. 200.

Du pôle comme centre, avec un rayon égal à l'unité, décrivons un cercle; ce cercle divisera en deux parties égales chacune des cordes qui passent par le centre; quand ω varie de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{\pi}{2}$, la valeur du radical, que nous désignerons par ρ_1, en posant $\rho = 1 \pm \rho_1$, croît de 0 à 1, ce qui donne les deux arcs AB et AO, qui se raccordent au point A, tangentiellement à la droite OA; l'arc AO est tangent au point O à la droite OY. En faisant varier ω de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{5\pi}{6}$, on obtiendra la partie BA'O, symétrique de BAO par rapport à la droite OY.

Quand ω varie de π à $\frac{3\pi}{2}$, ρ_1 décroît de ∞ à $\sqrt{3}$; ce qui donne les deux branches infinies EF et CD; en faisant varier

ω de $\frac{3\pi}{2}$ à 2π, on obtiendra les deux branches FE′, DC′, symétriques des précédentes; ces branches infinies sont asymptotes à l'axe polaire.

351—Remarque.—La distance variable MK d'un point M d'une branche infinie (fig. 195) à la direction OL, pour laquelle ρ devient infini, a pour expression

$$\pm\rho \sin(\omega-\alpha);$$

quand ω s'approche de α, le premier facteur croît indéfiniment et le second tend vers zéro. Dans les exemples précédents, on a pu découvrir sans peine ce que devenait ce produit pour des valeurs de ω voisines de α; lorsqu'il n'en est pas ainsi, on a recours à la règle suivante.

Le produit peut s'écrire

$$\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\omega-\alpha} : \frac{\frac{1}{\rho}}{\omega-\alpha}$$

Le premier facteur a pour limite l'unité; si l'on considère $\frac{1}{\rho}$ comme une fonction de ω, le numérateur du second est l'accroissement de $\frac{1}{\rho}$ quand l'angle polaire passe de la valeur α à la valeur ω; le diviseur étant l'accroissement de l'angle, le rapport a pour limite la valeur de la dérivée de $\frac{1}{\rho}$, considérée comme une fonction de ω, quand on y remplace ω par α. Lorsque cette dérivée est nulle, la branche considérée n'a pas d'asymptote; si la dérivée a une valeur d différente de zéro, la branche a une asymptote, située à la distance $\frac{1}{d}$ de la droite OL.

EXERCICES.

1° Trouver le lieu du sommet d'une parabole variable qui a un foyer fixe et qui touche une conique de même foyer (conchoïde).

2° Trouver le lieu du sommet d'un triangle variable, dont la base a est fixe, et dont les deux autres côtés b et c et la mé-

diane correspondante m vérifient la relation $b-c=m\sqrt{3}$ (lemniscate).

3° On donne un point fixe O et une droite fixe OP; on demande le lieu du sommet M d'un triangle variable MON qui remplit les conditions suivantes : le côté ON a une longueur constante a, le côté $NM = a\sqrt{2}$, enfin les angles vérifient la relation $\cos(MON - 2OMN) = \cos MOP$ (lemniscate); démontrer que la tangente en un point quelconque M du lieu passe au centre du cercle circonscrit au triangle qui a donné ce point.

4° Le triangle ABC est inscrit dans un cercle donné, le sommet A reste fixe et l'angle A constant; on demande le lieu ou centre du cercle inscrit dans le triangle ABC (limaçon).

5° Trouver le lieu du sommet d'un angle constant dont les deux côtés sont tangents à deux circonférences données (limaçon).

6° Trouver le lieu des foyers des paraboles qui ont une corde commune et une tangente commune, parallèle à cette corde.

7° On donne un cercle fixe, un cercle variable touche le premier en un point fixe; on demande le lieu du point de contact sur ce dernier cercle de la tangente commune aux deux cercles.

8° Trouver le lieu du sommet ou du foyer d'une hyperbole équilatère, dont le centre est fixe et qui passe en un point fixe.

9° Trouver le lieu du centre d'une hyperbole équilatère donnée, assujettie à passer par deux points fixes.

10° On donne un angle droit YOX, et un point fixe P sur la bissectrice de cet angle; on demande le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur une sécante variable qui intercepte dans l'angle un triangle dont l'aire est constante.

11° En un point quelconque M d'une parabole on mène la normale que l'on prolonge jusqu'au point N où elle rencontre l'axe; on demande le lieu du point de rencontre de la tangente en M à la courbe avec la perpendiculaire à l'axe au point N.

12° On remplace la parabole du problème précédent par une hyperbole; on prend le point N sur l'un des deux axes de la courbe; trouver le lieu.

13° Une parabole tourne autour de son foyer; on demande le lieu des points de contact des tangentes menées parallèlement à une droite donnée.

14° Trouver le lieu du point milieu d'une corde normale à une hyperbole donnée.

15° Étant donnée une ellipse, le centre d'un cercle de rayon constant parcourt un diamètre de l'ellipse; trouver le lieu des points de concours des sécantes communes au cercle et à l'ellipse.

16° Étant donnée une hyperbole équilatère, le centre d'un cercle, qui passe constamment par le centre de l'hyperbole, décrit une asymptote; trouver le lieu des points de concours des sécantes communes.

17° Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné aux cercles qui touchent une droite donnée en un point donné.

18° Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné aux cercles qui passent par un point donné et qui touchent une droite donnée.

19° Trouver le lieu des milieux des cordes inscrites dans une hyperbole donnée et tangentes à un cercle concentrique à l'hyperbole.

20° Construire les lieux représentés par les équations

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0,$$
$$x^4 + y^4 - 2ay^3 - 2bx^3y = 0,$$
$$(x^2 + y^2)^2 - 6axy^2 - 2ax^3 + 2a^2x^2 = 0,$$
$$y = a + b(x - c)^m,$$
$$x^4 + y^4 - 3x^3 - 4x^2 = 0,$$
$$x^3y^3 + y - x = 0,$$
$$y^4 - x^4 - 2bxy^2 + 2ax^3 = 0,$$
$$y^4 - x^4 - 2x^2y^2 + 2x = 0,$$
$$y^4 - x^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 = 0,$$
$$2x^3 - y^3 + (y - x)^2 = 0.$$

21° Construire les courbes représentées par les équations

$$2\sin y - \sin x = 0,$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}.$$

$$y = \frac{e^x}{x},$$

$$y = \frac{\sin x^2}{x},$$

$$y = x^x,$$

$$x^y = y^x,$$

22° Construire les courbes représentées par les équations

$$\rho = \frac{\sin\omega}{2\cos\omega - 1},$$

$$\rho = 1 \pm \sqrt{\frac{\sin 3\omega}{\cos\omega}},$$

$$\rho^2 \cos\omega - 2\rho \sin\omega + \cos^2\omega = 0,$$

$$\rho^2 \cos\omega - 4\rho \sin\omega + \tang\omega = 0,$$

$$\rho = \cos\omega \pm \sqrt{\frac{1 - 2\cos\omega}{\sin\omega}}.$$

CHAPITRE V.

De la similitude.

352—On appelle polygones semblables, en Géométrie élémentaire, deux polygones qui ont leurs angles égaux deux à deux et disposés dans le même ordre, et les côtés compris entre les angles égaux proportionnels. Cette définition ne peut pas, d'une manière simple, s'étendre aux figures courbes. Considérons deux polygones semblables ABCD, A'B'C'D' (fig. 201), et supposons que l'on fasse tourner le second de manière que le côté A'B' soit parallèle à son homologue AB; les côtés B'C', C'D'... seront aussi parallèles à leurs homologues BC, CD...;

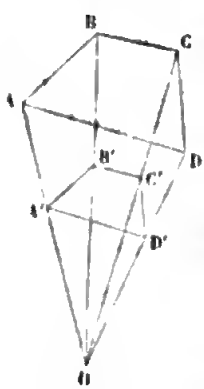


Fig. 201.

il en sera de même des diagonales homologues A'C', AC. Si l'on joint les points A et A' et que l'on prenne sur cette droite un point O tel que l'on ait $\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$, deux sommets homologues quelconques seront placés sur une droite passant par le point O, et l'on aura les rapports égaux

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} \ldots = \frac{AB}{A'B'}.$$

Cette propriété va nous servir pour la définition générale de la similitude.

DÉFINITION DE LA SIMILITUDE.

353—Soit un système quelconque de points A, B, C..., situés dans un plan; ces points pouvant être isolés les uns des autres, ou former des lignes continues; d'un point O, pris arbitrairement dans le plan, menons aux différents points du système des rayons OA, OB, OC..., et prenons sur ces rayons des points A', B', C',... tels que l'on ait

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} \ldots = k;$$

le système des points ainsi obtenus est dit *semblable* au système proposé et *semblablement placé*.

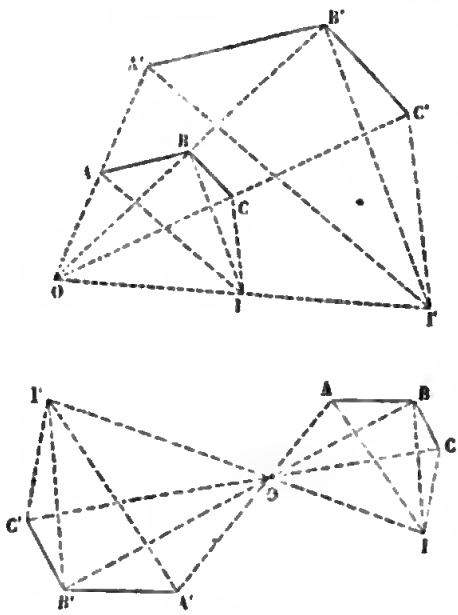


Fig. 202.

Si les points A', B', C',... étaient pris sur les prolongements des rayons vecteurs en sens inverse, les deux systèmes seraient *semblables* et *inversement placés*. Par une rotation de 180° autour du point O, le second système coïncide avec un des systèmes semblables et semblablement placés.

Pour abréger le langage, M. Chasles a désigné cette similitude de forme et de position par le nom d'*homothétie, directe* dans le premier cas, *inverse* dans le second. Le point O est dit *centre de similitude* ou *d'homothétie* des deux systèmes, le nombre k est le *rapport de similitude*, et on appelle points homologues les points A et A′ placés sur un même rayon. Si l'on fait varier le rapport k de 0 à ∞ et aussi la position du centre O de similitude, on obtient tous les systèmes homothétiques au système proposé.

Un système est *semblable* à un système donné, lorsqu'il est égal à l'un des systèmes homothétiques au système donné.

PROPRIÉTÉS DES FIGURES HOMOTHÉTIQUES.

354—Puisque les droites OA′, OB′ sont divisées en A et B dans le même rapport, la droite A′B′ est parallèle à AB, et l'on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'} = k.$$

Ainsi *la droite qui joint deux points* A *et* B *du premier système et celle qui joint les deux points homologues* A′ *et* B′ *du second système sont parallèles, et dans le rapport constant* k.

Soient A,B,C trois points en ligne droite, les droites A′B′, A′C′ respectivement parallèles à AB et à AC coïncident; donc *quand trois points sont en ligne droite, leurs homologues sont aussi en ligne droite.* Il en résulte que *la figure homothétique d'une droite est une droite parallèle à la première.* Si la première droite passe par le centre de similitude, les deux droites coïncident. Les droites homothétiques étant parallèles, on voit que *l'angle de deux droites est égal à l'angle des droites homothétiques.*

Les cordes qui joignent les points homologues de deux courbes homothétiques, étant parallèles, tendent, lorsque les deux points d'une même courbe se rapprochent indéfiniment, vers des directions parallèles; on en conclut que *les tangentes à deux courbes homothétiques en des points homologues sont parallèles.*

355—*Si deux systèmes sont tels que les droites menées d'un point* I *aux différents points du premier système et celles menées d'un point* I′ *aux différents points du second soient respectivement parallèles et dans un rapport constant* k, *ces deux systèmes sont homothétiques*. En effet, prenons sur I′I un point O tel que l'on ait $\frac{OI}{OI'}=k$, les deux rayons OA, OA′ auront même direction et auront pour rapport k; donc les deux systèmes sont homothétiques et le point O est le centre d'homothétie.

356—*Deux systèmes homothétiques à un troisième sont homothétiques entre eux.*

Avec le centre de similitude O et le rapport k construisons un premier système A′B′... I′ homothétique au système AB....I; avec le centre O′ et le rapport k' construisons un second système A″B″ .... I″. Les droites I′A′, I″A″, respectivement parallèles à IA, sont parallèles entre elles. On a d'ailleurs

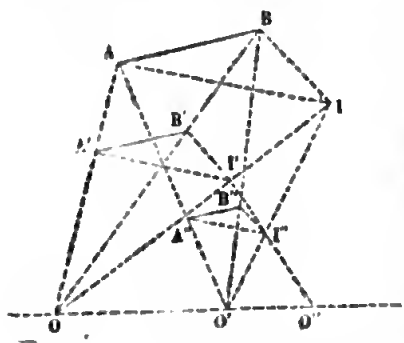


Fig. 203.

$$\frac{IA}{I'A'}=k,\quad \frac{IA}{I''A''}=k',$$

d'où

$$\frac{I'A'}{I''A''}=\frac{k'}{k}.$$

Ainsi les droites I′A′, I″A″ sont parallèles et dans un rapport constant; donc, en vertu du théorème précédent, les deux systèmes A′ et A″ sont homothétiques.

Deux systèmes A′ et A″ homothétiques à un troisième A et construits avec le même rapport sont égaux entre eux; car si $k=k'$, les rayons parallèles I′A′ et I″A″ sont égaux et les deux systèmes peuvent être superposés. On conclut de là qu'au moyen d'un seul centre O, en faisant varier le rapport k de 0 à ∞, on peut construire tous les systèmes homothétiques au système donné.

Lorsque les deux systèmes A′ et A″ sont tous deux homothétiques directs ou homothétiques inverses, par rapport au système A, ils sont homothétiques directs entre eux; mais si l'un est homothétique direct, l'autre homothétique inverse, ils sont entre eux homothétiques inverses.

Les centres de similitude de trois systèmes homothétiques deux à deux sont en ligne droite. En effet, la droite OO′ considérée comme appartenant au premier système a pour homologues, dans le second et dans le troisième système, cette droite elle-même, puisqu'elle passe par les centres O et O′. Cette droite est donc à elle-même son homologue dans les deux derniers systèmes, et par conséquent passe par leur centre de similitude O″.

357—*Lorsque deux figures à centre sont homothétiques directes, elles sont aussi homothétiques inverses, et réciproquement.*

Soient C et C′ les centres des figures, A et A′ deux points homologues ; je prends sur le prolongement de C′A′ un point A'_1 tel que $C'A'_1 = C'A'$, le point A'_1 appartient aussi à la seconde figure ; or $\frac{CA}{C'A'} = k$; donc $\frac{CA}{C'A'_1} = k$; puisque les rayons homologues CA et $C'A'_1$ sont dirigés en sens contraire, les deux courbes sont homothétiques inverses.

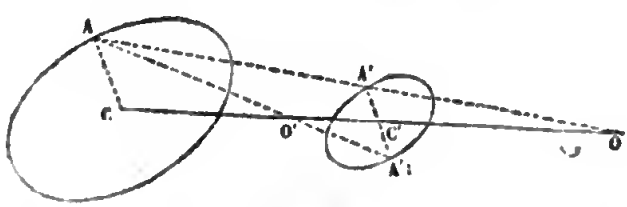


Fig. 204.

Il en résulte que les deux figures ont deux centres de similitude, l'un direct ou externe O placé sur le prolongement de la ligne des centres, l'autre inverse ou interne O′ placé dans l'intervalle CC′.

Lorsque trois figures à centre sont homothétiques deux à deux, elles ont trois centres de similitude externes et trois in-

ternes. Les trois centres de similitude externes sont en ligne droite; de même deux centres de similitude internes et le centre externe qui correspond au troisième interne sont aussi en ligne droite.

358—Les côtés homologues de deux polygones homothétiques ayant constamment pour rapport le nombre k, leurs périmètres sont dans le même rapport; ainsi *le rapport des périmètres de deux polygones homothétiques est égal au rapport de similitude.*

Si l'on abaisse de deux sommets homologues de deux triangles homothétiques des perpendiculaires sur les côtés opposés, ces perpendiculaires seront des droites homologues dans les deux systèmes, leur rapport sera égal à k, et par suite le rapport des aires des triangles sera égal à k^2.

En décomposant deux polygones homothétiques en triangles homothétiques deux à deux, on voit que le rapport des aires des figures est encore égal à k^2; ainsi *le rapport des aires de deux polygones homothétiques est égal au carré du rapport de similitude.*

Les deux théorèmes précédents s'étendent à des figures planes, terminées par des contours homothétiques quelconques.

CONDITIONS DE SIMILITUDE DE DIVERSES COURBES.

359—On a vu que l'on obtient toutes les courbes homothétiques à une courbe donnée S, avec un seul centre de similitude O, pris à volonté dans son plan. Considérons divers exemples :

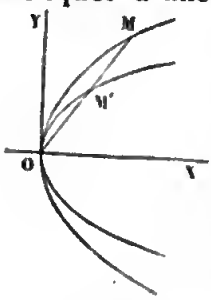


Fig. 205.

1° La courbe S est un cercle. Si l'on prend le centre du cercle pour centre de similitude, la seconde courbe sera un cercle, dont le rayon pourra avoir telle grandeur que l'on voudra.

2° La courbe S est une parabole (fig. 205). La courbe étant rapportée à son axe et à la tangente au sommet,

les coordonnées x et y d'un point quelconque M de cette courbe vérifient l'équation

$$y^2 = 2px.$$

Si l'on prend le sommet pour centre de similitude et que l'on représente par x' et y' les coordonnées du point homothétique M', on aura

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{OM}{OM'} = k,$$

d'où

$$x = kx', \quad y = ky',$$

la courbe homothétique est représentée par l'équation

$$y'^2 = \frac{2p}{k} x';$$

c'est une parabole, dont le paramètre peut avoir telle grandeur que l'on voudra, à cause du rapport arbitraire k; on en conclut que *deux paraboles quelconques sont semblables.*

3° La courbe S est l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si l'on prend le centre de la courbe pour centre de similitude, la courbe homothétique, représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{k}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{k}\right)^2} = 1,$$

est une ellipse, dont les axes peuvent avoir des valeurs quelconques proportionnelles à celles des axes de la première ellipse. On en conclut que *deux ellipses sont semblables lorsque leurs axes sont proportionnels.*

Le même théorème a lieu pour l'hyperbole.

4° La courbe S est la spirale logarithmique

$$\rho = a e^{m\omega},$$

a étant une ligne et m un nombre. Quand on prend le pôle pour le centre de similitude, les courbes homothétiques ont pour équation

$$\rho = \frac{a e^{m\omega}}{k};$$

si l'on pose $k = e^{m\alpha}$, cette équation devient

$$\rho = a\, e^{m(\omega - \alpha)};$$

elle représente la spirale proposée, que l'on a fait tourner de l'angle α autour du pôle. Il en résulte que la seule courbe semblable à une spirale logarithmique est cette spirale elle-même; à un premier point M de la courbe correspond un autre point M′ de la même courbe, que l'on peut prendre à volonté, à cause du nombre arbitraire k.

ÉQUATION DES COURBES HOMOTHÉTIQUES.

360. — Soit

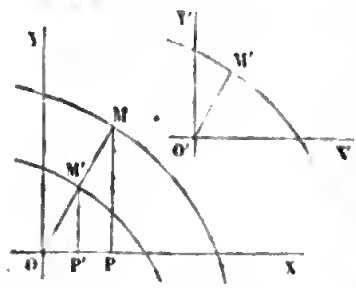


Fig. 206.

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe S. Prenons l'origine pour centre de similitude et construisons avec le rapport k une courbe S′ homothétique à la première. Si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point quelconque M de la première courbe, par x' et y' celles du point homologue M′ de la seconde, les triangles semblables OPM, O′P′M′ donnent

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{OM}{O'M'} = k;$$

et, si l'on substitue dans l'équation (1), on a l'équation

$$(2) \quad f(kx', ky') = 0,$$

qui représente toutes les courbes homothétiques à la proposée et ayant l'origine pour centre d'homothétie. Dans cette équation, on donnera à k une valeur positive lorsque l'homothétie sera directe, une valeur négative lorsque l'homothétie sera inverse.

Laissant fixe la courbe S, transportons la courbe S′ dans le plan, de manière que l'origine O vienne en O′ (p, q), et que les axes restent parallèles à leur position primitive; la courbe S′ a pour équation, par rapport aux axes O′X′ et O′Y′, $f(kx', ky') = 0$, et, par rapport aux axes fixes OX et OY,

$$(3) \quad f[k(x-p),\ k(y-q)] = 0.$$

Dans cette nouvelle position, la courbe S′ est homothétique à S; car les rayons vecteurs menés des points O et O′ sont parallèles et dans le rapport constant k. L'équation (3) représente donc toutes les courbes homothétiques à la courbe proposée, quelle que soit la position du centre de similitude.

361—En même temps que nous transportons l'origine en O′, faisons tourner les axes de l'angle α; la courbe S′ occupera alors une position quelconque dans le plan et sera simplement semblable à la proposée. La courbe S′, rapportée aux axes mobiles O′X′ et O′Y′, a pour équation

$$f(kx', ky') = 0;$$

au moyen des formules de transformation, les axes étant supposés rectangulaires,

$$x' = (x-p)\cos\alpha + (y-q)\sin\alpha,$$
$$y' = -(x-p)\sin\alpha + (y-q)\cos\alpha,$$

on obtient l'équation de la courbe par rapport aux deux axes fixes OX et OY. Cette équation représente toutes les courbes semblables à la proposée.

362—Comme application, cherchons les conditions pour que deux courbes du second degré

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
$$A'x^2 + B'xy + C'y + D'y + E'y' + F' = 0,$$

soient homothétiques. L'équation générale des courbes homothétiques à la première courbe est

$$Ak^2x^2 + Bk^2xy + Ck^2y^2 - (Bk^2q + 2Ak^2p - Dk)x - (Bk^2p + 2Ck^2q - Ek)y$$
$$+ (Ak^2p^2 + Bk^2pq + Ck^2q^2 - Dkp - Ekq + F) = 0.$$

En identifiant cette équation avec la seconde, on a

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{-Bq - 2Ap + \frac{D}{k}}{D'} = \frac{-Bp - 2Cq + \frac{E}{k}}{E'} = \frac{Ap^2 + Bpq + Cq^2 - \frac{D}{k}p - \frac{E}{k}q + \frac{F}{k^2}}{F'}.$$

L'élimination des trois paramètres p, q, k, entre ces cinq équations, donne deux équations de condition; or, les deux premières équations $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, ne renfermant pas les paramètres à éliminer, sont précisément les deux équations

de condition. Donc, *pour que deux courbes du second degré soient homothétiques, il faut que les coefficients des termes du second degré soient proportionnels.*

363—Il reste à examiner si les valeurs des paramètres p, q, k sont réelles et finies; on évite cette discussion de la manière suivante. Puisque les coefficients des termes du second degré sont proportionnels, on peut les rendre égaux en multipliant tous les termes de l'une des équations par un facteur convenable; prenons donc les deux équations sous la forme

$$(1)\quad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$
$$(2)\quad Ax^2+Bxy+Cy^2+D'x+E'y+F'=9.$$

Nous distinguerons plusieurs cas suivant le signe de la quantité B^2-4AC.

1° $B^2-4AC=0$. Les deux lieux sont du genre parabole ; si ces lieux sont effectivement deux paraboles, ils sont certainement semblables, puisque toutes les paraboles sont semblables; de plus, les axes des deux courbes, ayant le même coefficient angulaire $-\frac{B}{2C}$, sont parallèles, et par suite les courbes sont homothétiques.

2° $B^2-4AC<0$. Les lieux sont du genre ellipse. Si, pour chaque courbe, on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au centre de la courbe, les équations (1) et (2) deviennent

$$(3)\quad Ax^2+Bxy+Cy^2+F_1=0,$$
$$(4)\quad Ax^2+Bxy+Cy^2+F_1'=0.$$

Les axes des courbes, dont les directions sont déterminées par l'équation

$$tang\,2\alpha=\frac{B}{A-C},$$

sont parallèles. Si l'on fait tourner les axes des coordonnées de l'angle α, les équations (3) et (4) se reduisent à la forme

$$(5)\quad Mx^2+Ny^2+F_1=0,$$
$$(6)\quad Mx^2+Ny^2+F_1'=0.$$

Les coefficients M et N, dont les valeurs sont données par les relations

$$M+N=A+C,$$
$$M-N=\sqrt{B^2+(A-C)^2},$$

ont le même signe; pour que les équations (5) et (6) représentent deux ellipses, il faut que les quantités F_1, F_1' soient également de même signe et que, de plus, ce signe soit contraire au précédent. Lorsque cette condition est remplie, les axes des deux ellipses ayant le même rapport $\sqrt{\frac{N}{M}}$, les ellipses sont homothétiques.

3° $B^2-4AC>0$. Les deux lieux sont du genre hyperbole. En faisant les mêmes transformations que dans le cas précédent, on arrive aux équations (5) et (6) dans lesquelles M et N ont des signes contraires. Lorsque F_1 et F'_1 sont différents de zéro, chacune des équations représente une hyperbole. Si F_1 et F'_1 ont le même signe, les axes réels des deux courbes sont parallèles, et comme le rapport des axes est le même, les courbes sont homothétiques. Lorsque F_1 et F'_1 ont des signes contraires, l'une des hyperboles est semblable à la conjuguée de l'autre. Dans tous les cas, les deux courbes ont leurs asymptotes parallèles.

On conclut de ce qui précède que, lorsque *deux équations du second degré ont les coefficients des termes du second degré proportionnels, et représentent deux courbes, ces courbes sont homothétiques; cependant, quand les courbes sont des hyperboles, il peut arriver que l'une soit homothétique à la conjuguée de l'autre.*

ÉQUATION GÉNÉRALE D'UNE ESPÈCE DE COURBES.

364—On appelle *courbes de même espèce* les courbes comprises dans une même définition géométrique, et qui ne diffèrent les unes des autres que par les valeurs attribuées aux paramètres qui entrent dans la définition générale. L'équation générale des courbes de l'espèce considérée est une équation qui, dans un système de coordonnées, donne toutes ces courbes,

quelle que soit leur position dans le plan, quand on attribue diverses valeurs aux paramètres variables qu'elle renferme. Ainsi, lorsque les axes fixes sont rectangulaires, l'équation générale de l'espèce *cercle* est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0.$$

Cette équation renferme trois paramètres variables, savoir : le rayon r et les deux coordonnées du centre α et β.

365—Souvent on cherche d'abord l'équation de la courbe par rapport à des axes particuliers que l'on choisit de manière à simplifier le calcul; alors, pour obtenir l'équation générale, on la rapporte à des axes fixes par une transformation de coordonnées.

On a défini la lemniscate le lieu des points tels que le produit des distances de chacun deux à deux points F et F′ soit égal au carré de la moitié de la droite F′F. Si l'on prend pour origine le milieu O′ de la droit F′F, pour axes des coordonnées O′F et une perpendiculaire à O′F, et si l'on désigne par $2c$ la distance F′F, la courbe, rapportée à ces axes particuliers variables, est représentée par l'équation (n° 300)

$$(x'^2+y'^2)^2+2c^2(y'^2-x'^2)=0.$$

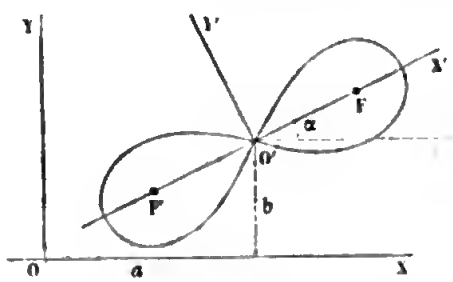


Fig. 207.

On rapporte ensuite la courbe aux axes fixes rectangulaires OX, OY, au moyen des formules de transformation

$$x'=(x-a)\cos\alpha+(y'-b)\sin\alpha,$$
$$y'=-(x-a)\sin\alpha+(y'-b)\cos\alpha,$$

dans lesquelles a et b désignent les coordonnées du point O′ par rapport aux axes fixes et α l'angle de la droite O′F avec OX. On arrivera ainsi à une équation

$$F(x, y, c, a, b, \alpha)=0$$

renfermant quatre paramètres arbitraires, et qui représente toutes les lemniscates ; c'est l'équation générale de l'espèce.

366—L'équation générale d'une espèce de courbes, par rapport à des axes fixes, contient trois paramètres de plus que

l'équation des mêmes courbes rapportées à des axes liés aux courbes d'une manière déterminée. Soit n le nombre total des paramètres, on pourra toujours remplacer ce système de paramètres par un autre système, tel que les variations de trois d'entre eux, ne fassent que déplacer la courbe dans son plan, tandis que les variations des $n-3$ autres changent sa forme ou ses dimensions.

307—Le nombre des points, et, en général, le nombre des conditions nécessaires pour déterminer complétement une courbe d'espèce donnée est égal au nombre des paramètres arbitraires que renferme l'équation générale de l'espèce. Les remarques faites, à propos des courbes du second degré (nº 274) sur les conditions multiples sont ici applicables. Toutefois, il importe de s'assurer préalablement que les paramètres qui entrent dans l'équation ne peuvent être réduits à un nombre moindre. Considérons, par exemple, le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux points fixes, dont nous désignerons les coordonnées par (a, b), (a', b'), soit constant et égal à k. Ce lieu, qui a pour équation

$$(1)\quad (x-a)^2+(y-b)^2-k^2[(x-a')^2+(y-b')^2]=0,$$

est une circonférence de cercle. L'équation (1) renferme cinq paramètres; mais si l'on développe et que l'on ordonne, elle devient

$$(2)\quad x^2+y^2-2\frac{a-k^2a'}{1-k^2}x-2\frac{b-k^2b'}{1-k^2}y+\frac{a^2+b^2-k^2(a'^2+b'^2)}{1-k^2}=0.$$

Trois des coefficients seulement renferment les paramètres; si on les représente par A, B, C l'équation (2) prend la forme

$$(3)\quad x^2+y^2+Ax+By+C=0.$$

Trois points suffisent pour déterminer les coefficients A, B, C, et, par conséquent la circonférence. Si l'on veut ensuite obtenir a, b, a', b', k, on aura un système de trois équations à cinq inconnues; il y aura indétermination, et deux des inconnues pourront être prises à volonté; ceci signifie que, pour une même circonférence, on peut trouver une infinité de couples de deux points tels que le rapport des distances de chacun

des points de la circonférence à ces deux points fixes soit constant. Si l'on donnait quatre points, il serait, en général, impossible de déterminer les cinq quantités a, b, a', b', k, de manière que le lieu représenté par l'équation (1) passât par ces quatre points; car on aurait quatre équations auxquelles devraient satisfaire les trois constantes A, B, C. Dans le cas particulier où ces équations seraient compatibles, on pourrait supprimer le quatrième point.

Supposons que la courbe soit algébrique et de l'ordre m; l'équation générale du degré m entre deux variables x et y, renfermant $\frac{m(+1)(m+2)}{2}$ termes, toute courbe de l'ordre m est déterminée par $\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1$ points; si l'équation renferme un plus grand nombre de paramètres, un certain nombre d'entre eux pourront être pris à volonté.

368—La définition géométrique d'une espèce de courbes indique elle-même le nombre des paramètres arbitraires que renferme son équation générale. La définition du cercle exige la connaissance du centre, dont la position est déterminée par ses deux coordonnées, et celle du rayon, en tout trois constantes ou paramètres arbitraires. La définition de la lemniscate exige la connaissance de deux points fixes, ce qui fait quatre constantes; pour l'ellipse, comme il faut connaître en outre la somme des rayons vecteurs, la courbe dépend de cinq paramètres. Dans la définition de la spirale d'Archimède entrent, un pôle, ce qui fait deux constantes, la position de la droite à l'instant où le mobile passe au pôle, et un rapport, en tout quatre constantes. La conchoïde dépend de cinq constantes, un point fixe et une droite fixe, déterminés chacun par deux constantes, et une longueur.

CONDITIONS DE SIMILITUDE DE DEUX FIGURES.

369—Considérons une série de courbes de même espèce, dans la définition desquelles il n'entre qu'un paramètre linéaire A, dont nous désignerons la mesure par a, et soit

$$(1)\quad f(x, y, a) = 0,$$

l'équation qui représente toutes es courbes, abstraction faite de leur position dans le plan. Si l'équation (1) a été obtenue sans spécifier l'unité linéaire, elle est nécessairement homogène par rapport à x, y, a. Quand on change le paramètre linéaire A, ce qui revient, l'unité restant la même, à faire varier le nombre a, l'équation (1) définit une série de courbes homothétiques. En effet, soit A_0 un paramètre ayant pour mesure a_0; à ce paramètre correspond la courbe particulière

$$(2)\quad f(x, y, a_0) = 0.$$

Les courbes homothétiques à la courbe (2), l'origine étant le centre d'homothétie et k un rapport arbitraire, sont représentées par l'équation (n° 360)

$$(3)\quad f(kx, ky, a_0) = 0.$$

Désignons par A_1 un second paramètre ayant pour mesure un nombre a_1, tel que $\frac{a_0}{a_1} = k$, l'équation (3) pourra s'écrire

$$f(kx, ky, ka_1) = k^m f(x, y, a_1) = 0,$$

ou

$$(4)\quad f(x, y, a_1) = 0;$$

ce qui signifie que les courbes homothétiques à la courbe (2) sont les diverses courbes que l'on obtient en faisant varier le paramètre A.

370—En général, supposons qu'il faille n paramètres linéaires A, B.... pour définir toutes les courbes d'une même espèce, abstraction faite de leur position dans le plan; désignons par a, b, c.... les mesures de ces paramètres au moyen d'une unité arbitraire; l'équation des courbes de l'espèce

$$(5)\quad f(x, y, a, b, \ldots) = 0$$

sera homogène par rapport à $x, y, a, b, \ldots$. Les courbes définies par l'équation (5) et qui correspondent à deux séries de paramètres proportionnels $A_0, B_0, \ldots$ et $A_1, B_1, \ldots$, sont homothétiques; car, si l'on désigne par k le rapport des paramètres

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{b_0}{b_1} \ldots = k,$$

les courbes homothétiques à la courbe

$$f(x, y, a_0, b_0, \ldots) = 0,$$

sont représentées par l'équation

$$f(kx, ky, ka_1, kb_1, \ldots) = k^m f(x, y, a_1, b_1, \ldots) = 0,$$

ou

$$f(x, y, a_1, b_1, \ldots) = 0.$$

Il résulte de ce qui précède que, lorsque la courbe, abstraction faite de sa position dans le plan est définie par une seule longueur, toutes les courbes de l'espèce sont semblables. Ainsi, le cercle étant défini par son rayon, la parabole par la distance du foyer à la directrice, la lemniscate par la distance des foyers, la spirale d'Archimède par la longueur que parcourt le mobile sur la droite pendant une révolution de cette droite, toutes les circonférences sont semblables, et de même toutes les paraboles, toutes les lemniscates, etc.

L'ellipse étant définie par les deux axes, la condition de similitude de deux ellipses est que ces axes soient proportionnels, comme nous l'avons déjà reconnu au n° 363. Il en est de même de deux hyperboles.

CHAPITRE VI

Des Problèmes déterminés.

371—Pour mesurer les grandeurs d'une certaine espèce, on les compare à une grandeur de même espèce, prise pour unité, et on les représente ainsi par des nombres. On conçoit par là comment les questions d'un ordre quelconque, et en particulier les questions géométriques, peuvent se ramener à des questions de nombres, et comment une relation entre les grandeurs d'une figure n'est autre chose qu'une équation entre les nombres qui les mesurent.

Avant l'invention de Descartes, chaque problème de géométrie se résolvait par un procédé spécial; la représentation des figures par des équations donne une méthode uniforme, applicable à toutes les questions géométriques. En effet, si

l'on suit pas à pas l'énoncé, on voit qu'il s'agit de mener des lignes d'après certaines conditions; ces lignes, par exemple, devront passer par des points déterminés, être perpendiculaires ou tangentes à d'autres lignes. Or si, au fur et à mesure, on cherche les équations de toutes ces lignes, la vérification du théorème ou la détermination des inconnues du problème, sera évidemment ramenée à une simple question algébrique. C'est ainsi que l'on a opéré dans l'étude de la ligne droite et des courbes du second degré. Mais cette méthode n'est pas toujours la plus simple, et, dans beaucoup de cas, il vaut mieux recourir à des procédés particuliers.

Quelquefois les théorèmes de la Géométrie élémentaire donnent immédiatement les équations nécessaires pour résoudre la question.

Exemple.—*Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle, connaissant la surface et le périmètre.*

En représentant par a le périmètre, par S la surface, par x et y les deux côtés de l'angle droit, et par z l'hypoténuse, on a de suite, au moyen de deux théorèmes simples, les trois équations

$$(1)\quad \begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2=z^2. \\ xy=2S, \end{cases}$$

suffisantes pour la détermination numérique des inconnues. Par une combinaison convenable, on trouve que $z=\frac{a^2-4S}{2a}$ et que x et y sont les racines de l'équation du second degré

$$(2)\quad u^2-\frac{a^2+4S}{2a}u+2S=0.$$

Pour que le problème soit possible, il faut 1° que l'on ait $a^2>4S$; 2° que les racines de l'équation (2) soient réelles et positives. Or, ces racines ne peuvent être réelles sans être positives, puisqu'elles sont de même signe et que leur somme est positive. Si donc on a en même temps

$$a^2>4S,\ (a^2+4S)^2>32a^2S,$$

la question admet une solution et une seule. La dernière inégalité peut se mettre sous la forme

$$16\left[S-\frac{a^2}{4}(3+2\sqrt{2})\right]\left[S-\frac{a^2}{4}(3-2\sqrt{2})\right]>0,$$

et pour qu'elle soit compatible avec la première on doit avoir

$$S<\frac{a^2}{4}(3-2\sqrt{2}).$$

Ainsi parmi tous les triangles rectangles de même périmètre a, le plus grand, a une surface égale à

$$S=\frac{a^2}{4}(3-2\sqrt{2}).$$

372—Souvent on ne connaît pas de relation immédiate entre les éléments de la figure qui entrent dans l'énoncé; on emploie alors une ou plusieurs inconnues auxiliaires que l'on choisit dans la figure, de manière qu'il existe des relations connues entre elles et les quantités proposées. Après avoir établi un nombre suffisant d'équations, on pourra, si l'on veut, éliminer les inconnues auxiliaires, et obtenir de la sorte des équations qui ne renferment plus que les données et les inconnues cherchées.

Exemple.—On demande la diagonale BD d'un quadrilatère inscrit ABCD dont on connaît les quatre côtés.

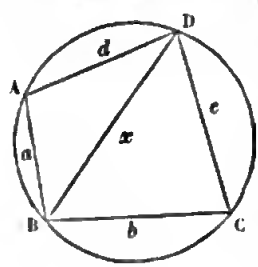


Fig. 208.

Représentons par a, b, c, d les quatre côtés, par x la diagonale cherchée, et prenons pour inconnues auxiliaires les deux angles opposés A et C, qui sont supplémentaires, on a les trois équations

$$x^2=a^2+d^2-2ad\cos A,$$
$$x^2=b^2+c^2-2bc\cos C,$$
$$A+C=\pi \text{ ou } \cos A=-\cos C,$$

qui, par l'élimination de A et C, donnent

$$x^2(ad+bc)=ad(b^2+c^2)+bc(a^2+d^2)=(ac+bd)(cd+ab);$$

on trouverait pareillement pour l'autre diagonale

$$y^2(ab+cd)=(ac+bd)(ad+bc),$$

d'où

$$x^2y^2=(ac+bd)^2, \quad xy=ac+ab$$

et

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{(cd+ab)^2}{(ad+bc)^2}, \quad \frac{x}{y}=\frac{cd+ab}{ad+bc}.$$

Il en résulte que, dans un quadrilatère inscrit, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés ; que le rapport des diagonales est égal au rapport des sommes des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de chacune d'elles.

DES DIFFÉRENTS CAS D'UNE MÊME QUESTION.

373—Lorsqu'une question géométrique présente plusieurs cas différents on considère chacun d'eux comme une question particulière, et, faisant la figure qui s'y rapporte, on met le problème en équation. Ordinairement les divers systèmes d'équations obtenus de la sorte se ramènent à un seul par l'emploi des quantités négatives.

Exemple I.—Par un point M mener une droite telle que la partie interceptée entre les deux droites données AA′, BB′ ait une longueur donnée.

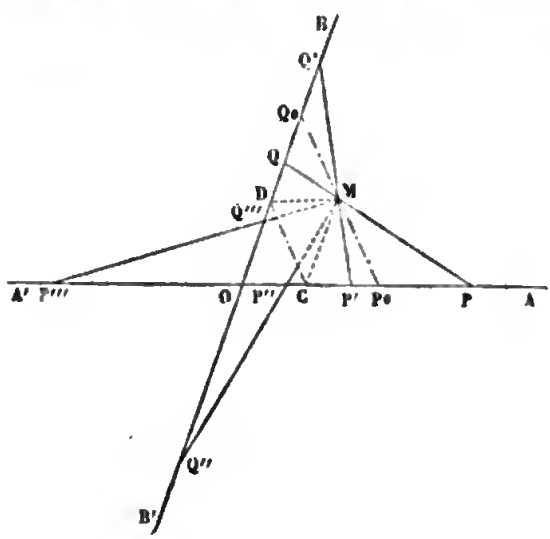


Fig. 209.

Appellons θ l'angle des deux droites dans lequel est situé le point M, a et b les coordonnées de ce point par rapport aux deux droites, x et y les coordonnées des points où la droite cherchée, qui peut avoir les diverses positions PMQ, MP″Q″, MQ″P‴, rencontre les axes des coor-

données; l'équation de cette droite sera, en désignant par X et Y les coordonnées courantes,

$$\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}=1,$$

et puisqu'elle doit passer au point M on a la relation

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1, \text{ ou } yx-ay-bx=0.$$

D'autre part la longueur l s'exprime par la formule

$$l^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta.$$

Ainsi les deux équations

$$(1)\quad \begin{cases} xy-ay-bx=0, \\ x^2+y^2-2xy\cos\theta=l^2, \end{cases}$$

au moyen des conventions faites sur les signes des coordonnées, résolvent tous les cas du problème. L'élimination de l'une des inconnues conduit à une équation du quatrième degré.

Si le point M est situé sur la bissectrice de l'angle AOB, c'est-à-dire si ses coordonnées a et b sont égales, l'équation du quatrième degré se ramène à des équations du second degré; mais dans ce cas il vaut mieux opérer de la manière suivante : Les équations (1) deviennent

$$xy-a(x+y)=0,$$

$$(x+y)^2-4xy\cos^2\frac{\theta}{2}=l^2;$$

on en tire

$$(2)\quad \begin{cases} x+y=2a\cos^2\frac{\theta}{2}\pm\sqrt{4a^2\cos^4\frac{\theta}{2}+l^2}, \\ xy=2a^2\cos^2\frac{\theta}{2}\pm a\sqrt{4a^2\cos^4\frac{\theta}{2}+l^2}. \end{cases}$$

Les inconnues x et y sont donc les racines de deux équations du second degré. Celle que l'on obtient en prenant le radical avec le signe — dans les formules (2) a toujours ses racines réelles, puisque le produit xy est négatif, elle donne les deux solutions MP''Q', MQ''P''', qui existent toujours. Si l'on prend le même radical avec le signe +, on trouve pour condition de réalité des deux racines qui sont alors posi-

tives, $l \geqslant 4a \sin \frac{\theta}{2}$. Comme la diagonale CD a une longueur égale à $2a \sin \frac{\theta}{2}$, cette condition est $l \geqslant 2\mathrm{CD}$. Il en résulte que la plus petite corde que l'on puisse tracer par le point M dans l'angle AOB est la corde P_0Q_0 parallèle à CD et égale à 2CD. Si la longueur l est plus grande que ce minimum, on aura deux solutions, PQ, P'Q', symétriquement placées par rapport à P_0Q_0.

Exemple II. — Par un point M mener une droite telle que le triangle formé par cette droite et deux droites fixes AA', BB' ait une surface donnée.

Conservons les mêmes notations que dans le problème précédent et appelons S la surface donnée; on a dans tous les cas

$$xy - ay - bx = 0.$$

Si la droite occupe la position PMQ, la surface S a pour valeur

$$S = \frac{xy \sin \theta}{2},$$

tandis que dans les deux autres cas on a

$$S = -\frac{xy \sin \theta}{2}.$$

Les solutions du premier cas sont donc données par le système

$$(1) \quad \begin{cases} xy - ay - bx = 0, \\ S = \dfrac{xy \sin \theta}{2}, \end{cases}$$

celles des deux autres cas par le système

$$(2) \quad \begin{cases} xy - ay - bx = 0, \\ S = \dfrac{xy \sin \theta}{2}, \end{cases}$$

Les solutions du second système sont toujours réelles. Quant à celles du premier, la condition de réalité est $S \geqslant 2ab \sin \theta$, il en résulte que le triangle minimum formé dans l'angle AOB est déterminé par la corde partagée en deux parties égales au point M. Si la surface S est plus grande que le minimum, on a deux solutions PQ, P'Q'.

374—Souvent les équations du problème admettent plus de systèmes de solutions réelles que n'en comporte l'énoncé; on cherche alors à modifier ce dernier, de telle sorte que chaque solution des équations corresponde à un cas du problème ; c'est ce qu'on appelle *généraliser* l'énoncé.

Exemple I.—Partager une droite donnée AB en moyenne et extrême raison.

Soit a la longueur donnée AB, x le plus grand segment AM, on a

$$(1)\quad x^2 = a(a-x)\ ,$$

ou

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Cette équation a deux racines réelles de signes contraires; cependant le problème, tel qu'il est proposé, n'admet qu'une solution, qui correspond à la racine positive de l'équation. Si l'on désigne par $-x'$ la racine négative, cette valeur vérifie la relation

Fig. 210.

$$x'^2 = a(a+x')\ ;$$

on voit que si l'on prend AM'$=x'$, la distance M'A est moyenne proportionnelle entre M'B et AB. Si donc on convient de porter la racine positive à partir de A dans la direction AB et la racine dans la direction, opposée l'équation (1) résout la question suivante : *Trouver sur la droite indéfinie* AB *un point tel que sa distance au point* A *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* B *et la longueur* AB.

Exemple II.—Circonscrire à un cylindre un cône dont le volume soit égal à un volume donné V.

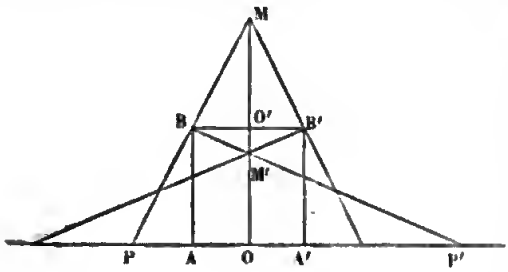


Fig. 211.

Désignons par r le rayon de la base, par h la hauteur du cylindre donné, par x la hauteur OM, par y le rayon de la base du cône, on a

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{y}{x}=\dfrac{r}{x-h}, \quad \text{ou } y=\dfrac{rx}{x-h}, \\ V=\dfrac{1}{3}\pi y^2 x \end{cases}$$

d'où, par l'élimination de y,

$$(2)\quad x^3-\frac{3V}{\pi r^2}(x-h)^2=0.$$

Cette équation ne peut pas avoir de racines négatives; elle a toujours une racine positive comprise entre 0 et h, qui ne convient pas à la question proposée; ainsi lorsque la question proposée a une solution les trois racines de l'équation (2) sont réelles. La condition de réalité des trois racines est

$$V \geqslant \frac{9}{4}\pi r^2 h.$$

Lorsque le volume donné est plus grand que le volume $\frac{9}{4}\pi r^2 h$, l'équation admet une racine comprise entre h et $3h$, une autre plus grande que $3h$; ces deux racines donnent deux solutions de la question. Lorsque le volume donné est égal à $\frac{9}{4}\pi r^2 h$, les deux racines deviennent égales à $3h$ et les deux cônes se confondent. Le cône circonscrit minimum a pour volume $\frac{9}{4}\pi r^2 h$.

Soit x' la racine comprise entre 0 et h, $-y'$ la valeur négative de y correspondante, les équations deviennent

$$y'=\frac{rx'}{h-x'}, \quad V=\frac{1}{3}hy'^2x';$$

or, si l'on prend $OM'=x'$ et que l'on mène la droite BM, on trouve $y'=OP'$, par suite $\frac{1}{3}\pi y'^2 x'$ est le volume engendré par la rotation du triangle rectangle $M'OP'$ autour de OO'. Ainsi l'équation (2), par ses trois racines, résout la question suivante: *Étant donnés un cercle* BB', *un plan* AA', *parallèle au plan du cercle, et la ligne droite* OM *perpendiculaire aux deux plans et passant par le centre du cercle, trouver sur cette ligne droite*

un point tel qu'en le prenant pour sommet d'un cône dont la directrice serait la circonférence, le volume compris entre le sommet et le plan AA′ *soit égal à un volume donné.*

375—En général les conditions d'un problème sont traduites algébriquement par un certain nombre d'équations et d'inégalités simultanées ; tout système de valeurs réelles qui satisfont à la fois aux équationset aux inégalités donne une solution de la question. Dans les exemples qui précèdent, on a vu que l'on pouvait transformer l'énoncé de manière à lui donner toute l'étendue des équations, de manière, par conséquent, à supprimer les inégalités. Les équations sont de la sorte la traduction fidèle du nouvel énoncé, et tout système de valeurs réelles qui satisfont à ces équations donne une solution de la question ainsi transformée. Mais cette généralisation n'est pas toujours facile, et pour l'opérer, il faudrait souvent faire subir à l'énoncé des modifications très-considérables qui changeraient en quelque sorte la nature de la question.

Exemple I.—*Couper une sphère par un plan, de manière que le volume du segment soit égal au volume du cône qui aurait pour base la base du segment et pour sommet le centre de la sphère.*

Soit x la distance du centre au plan sécant : le volume du cône sera $\frac{1}{3}\pi x(r^2-x^2)$, celui du segment, qui doit être la moitié du secteur, $\frac{1}{3}\pi r^2(r-x)$; d'où l'équation

$$x(r^2-x^2)=r^2(r-x),$$

ou

$$(1)\quad (x-r)(x^2+rx-r^2)=0.$$

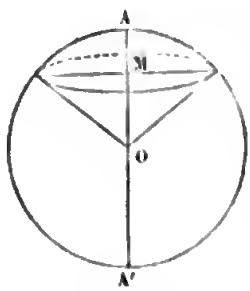


Fig. 212.

La longueur x doit être comprise entre 0 et r, c'est-à-dire qu'à l'équation précédente il faut joindre les inégalités

$$0<x<r.$$

L'équation (1) a d'abord une racine égale à r; elle donne un

segment et un cône nuls; si on en fait abstraction, l'équation se réduit au second degré

$$(2)\quad x^2+rx-r^2=0.$$

Cette équation est celle que l'on obtient quand on veut partager le rayon, en moyenne et extrême raison, de façon que le plus grand segment parte du centre. Elle a une racine positive plus petite que r et une racine négative numériquement plus grande que r; à la première correspond une solution de la question; quant à la seconde, elle donne un plan sécant qui ne rencontre pas la sphère; donc, en se bornant à ce corps, il n'y a pas lieu de chercher une généralisation de l'énoncé primitif.

Exemple II.—*Couper une sphère de rayon* r *par un plan, de manière que le volume du segment obtenu soit égal à celui d'une sphère de rayon* a.

Supposons le plan sécant perpendiculaire au diamètre AA'; appelons x la distance OM du centre à ce plan, prise avec le signe + ou le signe —, suivant quelle est portée sur OA ou sur OA'. En évaluant le volume du segment, on a, dans tous les cas, l'équation

$$\frac{4}{3}\pi a^3=\frac{2}{3}\pi r^2(r-x)-\frac{\pi}{3}x(r^2-x^2),$$

ou

$$(1)\quad x^3-3r^2x+2(r^3-2a^3)=0,$$

à laquelle il faut joindre les inégalités $-r<x<r$.

L'équation a une racine positive plus grande que r qui ne convient pas à la question. Comme a est plus petit que r, elle a une racine négative numériquement plus grande que r, qui ne convient pas non plus à la question. La troisième racine comprise entre $-r$ et $+r$, donne la solution de la question.

Pour avoir un enoncé tel qu'à toute racine réelle de l'équation corresponde une solution, il faudrait employer, concurremment avec la sphère, un autre corps, l'hyperboloïde de révolution à deux nappes.

Exemple III.—*Trouver une circonférence telle qu'en portant, à partir de l'un de ses points, trois cordes données à la suite l'une de l'autre, mais dans un sens quelconque, on arrive au point diamétralement opposé.*

Appellons x le rayon cherché, $2a$, $2b$, $2c$ les trois cordes rangées par ordre de grandeur, $a>b>c$; 2α, 2β, 2γ les angles au centre correspondants, angles positifs ou négatifs, suivant que les cordes sont portées dans un sens ou dans l'autre, on a

$$(1)\quad a=\pm x\sin\alpha,\qquad b=\pm x\sin\beta.\qquad c=\pm x\sin\gamma,$$

$$(2)\quad \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2};$$

$$a<x<a+b+c.$$

L'équation (2) donne

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin\gamma^2+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma-1=0;$$

d'où

$$x^3-(a^2+b^2+c^2)x\mp 2abc=0.$$

Cette dernière se décompose en deux équations qui ont leurs racines égales en valeur absolue et de signes contraires; il suffit de considérer l'une d'elles

$$(4)\quad x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0.$$

L'équation (4) a: 1° une racine positive comprise entre

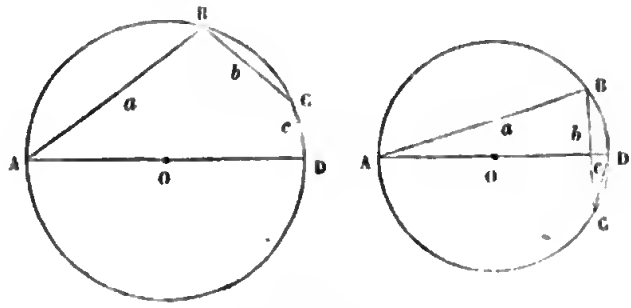


Fig. 213.

a et $a+b+c$; 2° une racine négative comprise entre $-a$ et $-(a+b+c)$; 3° une racine négative comprise entre 0 et $-c$. Cette dernière doit être rejetée; les valeurs absolues des deux premières racines donnent deux cercles satisfaisant à la question. Dans le cercle qui correspond à la première, les trois cordes

sont portées dans le même sens, et dans celui qui correspond à la seconde, les deux plus grandes cordes sont portées dans le même sens, et la plus petite en sens contraire; l'ordre dans lequel on porte les cordes est d'ailleurs indifférent, et il n'y a que ces deux combinaisons possibles.

376—Quelquefois la multiplicité des racines de l'équation finale provient, non pas de ce que la question admet plusieurs solutions, ou qu'il entre dans l'équation des racines étrangères à la question, mais de ce que les équations du problème renferment les inconnues symétriquement, c'est-à-dire ne changent pas lorsqu'on permute ces inconnues; alors l'équation finale, étant la même pour ces diverses inconnues, les renferme toutes, et doit être par conséquent d'un degré au moins égal à leur nombre. Le problème du n° 371 présente cette circonstance, les équations sont symétriques par rapport à x et y, aussi on a trouvé que ces deux inconnues étaient racines d'une même équation du second degré.

Exemple.—*Déterminer les côtés* x, y, z, *d'un triangle, connaissant sa surface* S, *le rayon* r *du cercle inscrit, et le rayon* R *du cercle circonscrit.*

Les équations

$$x+y+z=2p,$$
$$p(p-x)(p-y)(p-z)=S^2,$$
$$pr=S,$$
$$xyz=4RS,$$
$$x<p,\quad y<p,\quad z<p,$$

obtenues au moyen de l'inconnue auxiliaire p qui désigne le demi-périmètre, étant symétriques par rapport à x, y, z, conduisent à une équation finale qui sera au moins du troisième degré, et qui, par ses diverses racines, donnera les valeurs des trois inconnues.

En effet, de la première et de la troisième, on déduit

$$x+y+z=\frac{2S}{r};$$

de la seconde, développée,

$$xy+yz+zx=r^2+4Rr+\frac{S^2}{r^2}.$$

On connaît ainsi la somme des produits des côtés combinés, un à un, deux à deux, trois à trois; ces côtés sont donc les racines de l'équation du troisième degré

$$(1)\quad u^3-\frac{2S}{r}u^2+\left(r^2+4Rr+\frac{S^2}{r^2}\right)u-4RS=0.$$

Cette équation n'a pas de racines négatives; en l'écrivant sous la forme

$$(2)\quad u\left(u-\frac{S}{r}\right)^2+4Rr\left(u-\frac{S}{r}\right)+r^2u=0,$$

on voit que $\frac{S}{r}$ est une limite supérieure des racines; or $\frac{S}{r}$ est la demi-somme des racines; donc si la condition de réalité est satisfaite, chacune d'elles étant plus petite que la demi-somme des trois ou plus petite que la somme des deux autres, le triangle sera possible. Si l'on pose $u=u'+\frac{2S}{3r}$, le second terme disparaît, et l'équation devient

$$(3)\quad u'^3-\left(\frac{S^2}{3r^2}-r^2-4Rr\right)u'+\frac{2S}{3}\left(\frac{S^2}{9r^2}+r-2R\right)=0.$$

La condition de réalité est

$$(4)\quad S^4-r^2(4R^2+20Rr-2r^2)S^2+r^5(r+4R)^3\leqslant 0.$$

Le premier membre étant un trinôme du second degré en S^2, les deux racines de l'équation obtenue, en égalant ce trinôme à zéro, doivent être réelles, sans quoi le trinôme serait constamment positif; désignons ces deux racines par S'^2 et S''^2, on a

$$S'^2=r^2[2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}],$$
$$S''^2=r^2[2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}].$$

Quand ces quantités sont réelles, elles sont nécessairement positives. La condition (4) se transforme dans les suivantes

$$R>2r,\quad S'>S>S''.$$

Ainsi, dans tout triangle, le rayon du cercle circonscrit est supérieur ou égal au double du rayon du cercle inscrit.

Lorsque $R=2r$, la condition de réalité devient

$$(S^2-27r^4)^2 \leqslant 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$S \leqslant 3r^2\sqrt{3};$$

si elle est satisfaite, l'équation (1) se réduit à

$$u^3-6\sqrt{3}ru^2+36r^2u-24\sqrt{3}r^3=0,$$

ses trois racines son égales à $2\sqrt{3r}$, et le triangle est équilatéral.

CONSTRUCTION DES FORMULES.

377—En résolvant, si cela est possible, les équations d'un problème, on obtient des formules qui indiquent les opérations arithmétiques qu'il faut effectuer sur les nombres qui mesurent les grandeurs connues pour avoir les valeurs numériques des inconnues. Mais ne pourrait-on pas déduire de chaque formule, ou même de chaque équation, une construction graphique propre à donner, non plus la valeur numérique de l'inconnue, mais l'inconnue elle-même ? En un mot, est-il possible de remplacer les opérations numériques par des opérations graphiques? Dans la Géométrie élémentaire, on ne considère que les constructions qui peuvent être effectuées au moyen d'un nombre limité de lignes droites et de cercles, et qui, par conséquent, n'exigent que l'emploi de la règle et du compas. Comme le cercle est la plus simple des courbes et la plus facile à décrire, les anciens géomètres attachaient beaucoup de prix à ces sortes de constructions; d'un autre côté, ignorant l'analyse algébrique, ils manquaient de moyens pour décider si la question qu'ils avaient en vue est susceptible d'une solution de ce genre, et ce n'est qu'après avoir fait bien des efforts inutiles qu'ils se décidaient enfin à recourir à d'autres courbes. Leurs recherches ont rendu célèbres certains problèmes que l'on démontre aujourd'hui ne pouvoir être résolus par la ligne droite et le cercle. Tels sont les problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle, etc.

Nous supposerons que l'inconnue est une ligne droite;

quand l'inconnue est une surface ou un volume, on la représente par $a\,x$ ou a^2x, a étant une ligne prise arbitrairement, la construction de la ligne x donne un rectangle ou un parallélipipède équivalents à la surface ou au volume cherché. La détermination d'un angle donné par une de ses lignes trigonométriques se ramène aussi à celle d'une droite. Nous supposerons encore que toutes les lettres désignent, ainsi que x, des lignes droites.

La formule doit être homogène et du premier degré, elle peut d'ailleurs être entière, rationnelle ou irrationnelle. Quand elle est entière, elle a la forme

$$x = a - b + c \ldots\ldots$$

et la longueur x s'obtient en portant à la suite l'une de l'autre, dans un sens ou dans l'autre, les longueurs a, b, c.

378—Monôme rationnel.—Considérons d'abord la formule

$$x = \frac{ab}{c}.$$

L'inconnue est une quatrième proportionnelle que l'on construira par deux parallèles ou par un cercle.

Soit maintenant

$$x = \frac{abcd}{a'b'c'} \text{ ou } x = \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'} \times \frac{cd}{c'}.$$

L'inconnue x s'obtiendra par une série de quatrièmes proportionnelles,

$$\gamma = \frac{cd}{c'}, \quad \beta = \frac{b\gamma}{b'}, \quad x = \frac{a\beta}{a'}.$$

Par la construction précédente un monôme du degré m $\frac{abc\ldots\ldots ghi\ldots\ldots l}{a'b'c'\ldots\ldots g'}$ se ramènera à la forme $\alpha i\ldots\ldots l$, ou encore à celle-ci $\lambda^{m-1}\,t$, λ étant une ligne quelconque et t une ligne déterminée par la formule

$$t = \frac{\alpha i\ldots\ldots l}{\lambda^{m-1}}.$$

379—Fonction rationnelle.—Considérons la formule

$$x = \frac{A - B + C}{A' + B' - C'},$$

dans laquelle A, B, C désignent des monômes du degré $m+1$, A′, B′, C′ des monômes du degré m. On ramène d'abord chacun de ces monômes aux formes simples

$$\lambda^m a,\ \lambda^m b,\ \lambda^m c, \ldots\ldots \lambda^{m-1} a',\ \lambda^{m-1} b',\ \lambda^{m-1} c',$$

et l'on a

$$x = \frac{\lambda(a-b+c)}{a'+b'-c'} = \frac{\lambda\alpha}{\beta}.$$

L'inconnue x s'obtient par une quatrième proportionnelle à β, α, λ.

Si la fraction était du degré m, les opérations qui précèdent la ramèneraient à la forme

$$\lambda^{m-1}\frac{\lambda\alpha}{\beta} = \lambda^{m-1} t.$$

380—Formule irrationnelle du second degré. — Soit d'abord l'équation

$$x = \sqrt{ab} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

L'inconnue x est une moyenne proportionnelle entre les lignes a et b; on l'obtient par un triangle rectangle ou par une tangente au cercle.

Lorsque le radical porte sur une fonction rationnelle du degré m, on le ramène à la forme

$$\sqrt{\lambda^{m-1} t} = \sqrt{\lambda^{m-2}\lambda t} = \lambda^{\frac{m-2}{2}} x.$$

Considérons maintenant une formule irrationnelle du second degré dans laquelle nous supposons que les quantités réunies par le signe + ou le signe — sont homogènes et du même degré. Pour plus de clarté nous imaginerons la valeur de x ramenée à la forme

$$x = \frac{N}{D},$$

N et D désignant des fonctions dans lesquelles n'entre pas le signe de la division ni d'exposant fractionnaire on négatif; on peut supposer aussi qu'il n'y a pas de produit de deux radicaux ni de produit d'un radical par une quantité entière. Pour

obtenir la valeur du numérateur N, il faut effectuer certaines opérations dans un ordre déterminé; le premier signe radical porte sur une expression entière, on le ramènera à la forme $\lambda^{\frac{m}{2}} u$; si cette quantité doit être ajoutée à d'autres, on ramènera celles-ci à la même forme et par suite aussi leur somme. Un nouveau signe radical peut porter maintenant, soit sur une quantité entière, soit sur une quantité affectée de l'exposant $\frac{m}{2}$, m étant impair. Dans tous les cas, on ramènera le radical à la forme $\lambda^{\frac{m}{4}} v$; on ajoutera ce terme à d'autres de même forme, et ainsi de suite. On voit ainsi que le numérateur N prendra la forme $\lambda^{\frac{p}{2^i}} t$. Il en sera de même du dénominateur D; l'inconnue x étant du premier degré, on l'obtiendra par une quatrième proportionnelle.

On démontre que les hypothèses que nous avons faites sur la composition de la formule sont nécessaires pour qu'elle soit homogène.

Ainsi, *toute expression homogène du premier degré, composée d'une manière quelconque, au moyen des signes d'opérations simples, addition, soustraction, multiplication, division, élévation à une puissance entière, racine carrée; en un mot, toute expression irrationnelle du deuxième degré peut être construite au moyen d'un nombre limité de lignes droites et de cercles.*

On démontre aussi que les expressions de cette nature sont seules susceptibles d'être construites de la façon indiquée; mais cette démonstration ne peut trouver place ici. Ainsi, par exemple, le côté x du cube double d'un autre dont le côté est a, côté donné par la formule

$$x = \sqrt[3]{2a^3},$$

ne peut pas s'obtenir par la règle et le compas; il en est de même, en général, des racines des équations du troisième et du quatrième degré, puisqu'il entre des radicaux cubiques dans l'expression de ces racines.

381—Remarques.—Les seules opérations élémentaires absolument indispensables pour la construction d'une formule irrationnelle du second degré sont celles qui déterminent les quatrièmes proportionnelles et les moyennes proportionnelles. Dans certains cas, on peut arriver plus rapidement au résultat. Ainsi les formules

$$x=\sqrt{a^2+b^2},\quad x=\sqrt{a^2-b^2},$$

se construisent directement au moyen du théorème du carré de l'hypoténuse; la première représente l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont a et b; la seconde un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'autre côté est b et l'hypoténuse a.

On obtiendrait de la même manière, par une suite de triangles rectangles, la valeur de l'expression

$$x=\sqrt{a^2-b^2+c^2+d^2\ldots\ldots}$$

Soit encore la formule

$$x=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2^2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{a^3+a^2b-ab^2-b^3}.$$

L'application du procédé général serait fort longue, mais si l'on observe que la valeur de x peut se mettre sous la forme

$$x=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{(a+b)^2(a-b)},$$

on arrivera très-promptement au résultat.

382—Lorsqu'on veut obtenir les inconnues d'un problème, il importe de combiner de la manière la plus simple les opérations graphiques élémentaires propres à conduire au résultat.

Exemple I.—*Partager une droite en moyenne et extrême raison* (n° 374).

Il faut construire les racines x' et $-x''$ de l'équation

$$x^2+ax-a^2=0,$$

d'où

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Au point B élevons la perpendiculaire $BC=\frac{a}{2}$; il en résulte

$$AC=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}},\quad x'=AC-BC,\quad x''=AC+BC.$$

Si du point C comme centre, avec CB pour rayon, on décrit une demi-circonférence DBD′, on a $x'=AD$, $x''=AD'$; si l'on prend

$AM=AD$,
$AM'=AD'$,

M et M′ sont les deux points cherchés. On retrouve ainsi la construction indiquée en Géométrie élémentaire.

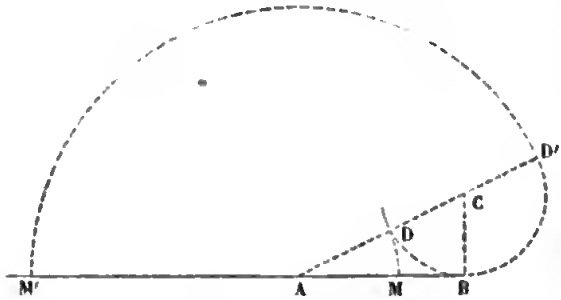


Fig. 214.

Exemple II.— Prenons encore le problème du nº 373 : lorsque le point M est placé sur la bissectrice et que, de plus, l'angle θ est droit.

Les équations du problème, dans ce cas particulier, se réduisent à

$$x+y=a\pm\sqrt{a^2+l^2},\qquad xy=a(x+y).$$

Prolongeons l'ordonnée du point M d'une longueur $ME=l$, joignons DE, puis du point D comme centre, avec DE pour rayon, décrivons une demi-circonférence FEF′; les deux valeurs de $x+y$ sont MF′ et —MF. Considérons la première valeur

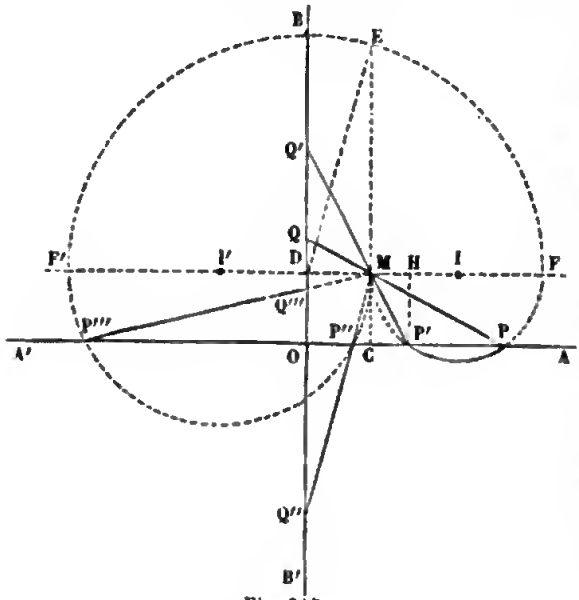


Fig. 215.

$x+y=\mathrm{MF}'=2a+\mathrm{MF}=2\mathrm{DI}$ (I étant le milieu de MF).

Soit $\qquad x=\mathrm{DI}+z, \quad y=\mathrm{DI}-z,$

on aura $\qquad xy=\mathrm{DI}^2-z^2=2a\,\mathrm{DI}.$

d'où $z^2=\mathrm{DI}^2-2a\,\mathrm{DI}=(a+\mathrm{MI})^2-2a\,(a+\mathrm{MI})=\mathrm{MI}^2-a^2;$

Sur MF comme diamètre, décrivons une demi-circonférence MP'PF, elle coupe la droite A'A en deux points P et P', et si l'on mène P'H perpendiculaire sur III, on a $\mathrm{IH}=z$, ce qui donne les deux solutions PQ et P'Q'. La condition d'existence de ces solutions est

$$\mathrm{MI}\geqslant a, \quad \mathrm{DE}\geqslant 3a, \quad l\geqslant 2a\sqrt{2}\geqslant 2\mathrm{CD}.$$

On obtiendrait de même les deux autres solutions par la demi-circonférence décrite sur le diamètre MF'.

383—Quelquefois une simple remarque sur les équations d'une problème indique une construction synthétique.

Exemple.—*Construire un triangle, connaissant les longueurs des trois médianes.*

Désignons par a, b, c les trois côtés inconnus, par a', b', c' les médianes correspondantes; on a entre ces six grandeurs les relations suivantes

$$3a^2+4a'^2=3b^2+4b'^2=3c^2+4c'^2=2(a^2+b^2+c^2)=\frac{8}{3}(a'^2+b'^2+c'^2).$$

ou

$$a'^2+\frac{3}{4}a^2=b'^2+\frac{3}{4}b^2=c'^2+\frac{3}{4}c^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=\frac{2}{3}(a'^2+b'^2+c'^2).$$

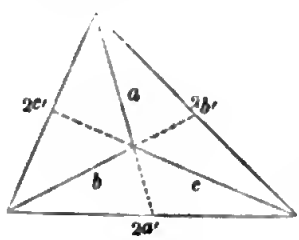


Fig. 216.

Soient a_1, b_1, c_1 les médianes du triangle dont a', b', c' seraient les côtés; on aura pareillement

$$3a'^2+4a_1^2=3b'^2+4b_1^2=3c'^2+4c_1^2=2(a'^2+b'^2+c'^2)=\frac{8}{3}(a_1^2+b_1^2+c_1^2).$$

ou

$$a'^2+\frac{4}{3}a_1^2=b'^2+\frac{4}{3}b_1^2=c'^2+\frac{4}{3}c_1^2=\frac{8}{9}(a_1^2+b_1^2+c_1^2)=\frac{2}{3}(a'^2+b'^2+c'^2).$$

La comparaison de ces relations donne

$$a=\frac{4}{3}a_1,\quad b=\frac{4}{3}b_1,\quad c=\frac{4}{3}c_1;$$

Et comme les médianes d'un triangle se coupent en un point situé aux deux tiers de chacune d'elles à partir des sommets, il en résulte cette construction graphique très-simple :

Formez le triangle qui a pour côtés les doubles des médianes données ; les lignes qui joignent les trois sommets de ce triangle au point de concours de ses trois médianes sont précisément les côtés du triangle cherché.

CONSTRUCTION DES RACINES DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ ET DE L'ÉQUATION BICARRÉE.

384—L'équation du second degré à une seule inconnue se ramène à la forme $x^2+px+q=0$; pour qu'elle soit homogène, il faut que p soit une quantité de première dimension, et q une quantité de seconde dimension; si ces quantités sont rationnelles ou irrationnelles du second degré, on pourra construire une ligne a équivalente à la première et un carré b^2 équivalent à la seconde ; et l'équation du second degré, en mettant en évidence les signes de ses divers termes, aura l'une des quatre formes suivantes

$$x^2+ax+b^2=0,$$
$$x^2+ax-b^2=0,$$
$$x^2-ax+b^2=0,$$
$$x^2-ax-b^2=0.$$

Les racines de la première et de la seconde sont celles de la troisième et de la quatrième, prises en signes contraires; il suffit donc de considérer celles-ci; or, si on les écrit

$$x(a-x)=b^2,\quad x(x-a)=b^2,$$

on voit qu'il s'agit de construire un rectangle équivalent à un carré b^2, et dont la somme ou la différence des côtés soit égale à une ligne donnée a, problèmes que l'on résout en Géométrie élémentaire. La résolution des équations et la construction

des formules feraient au besoin retrouver les solutions de la Géométrie.

L'équation bicarrée se ramène pareillement à l'un des types

$$x^4+abx^2-c^2d^2=0,$$
$$x^4-abx^2+c^2d^2=0,$$
$$x^4-abx^2-c^2d^2=0;$$

car il est inutile de considérer l'équation $x^4+abx^2+c^2d^2=0$, qui n'a que des racines imaginaires. Si l'on pose $x^2=cz$, ces équations deviennent

$$z^2+\frac{ab}{c}z-d^2=0,\quad z^2-\frac{ab}{c}z+d^2=0,\quad z^2-\frac{ab}{c}z-d^2=0.$$

On détermine, comme on vient de le dire, les racines z de celles-ci, puis on trouve x par une moyenne proportionnelle entre c et z.

CONSTRUCTION DES SOLUTIONS DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES L'UNE DU SECOND DEGRÉ ET L'AUTRE DU PREMIER DEGRÉ.

385—Ces deux équations sont de la forme

$$(1)\quad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$
$$(2)\quad Px+Qy+R=0.$$

L'élimination de l'une des inconnues, y par exemple, conduit à une équation homogène en x du second degré, dont les racines s'obtiennent d'après les constructions précédentes. Quand les deux valeurs de x sont connues, on détermine les deux valeurs correspondantes de y par la formule

$$y=-\frac{P}{Q}x-\frac{R}{Q};$$

l'équation (1) représente une courbe du second degré, l'équation (2) une ligne droite; donc *les points de rencontre d'une courbe du second degré et d'une ligne droite s'obtiennent par la règle et le compas, sans qu'il soit nécessaire de construire la courbe.*

Nous avons donné (livre III, chapitre VIII) la construction à l'aide de laquelle on obtient ces points.

CONSTRUCTION DES RACINES DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME OU DU QUATRIÈME DEGRÉ.

386—Considérons deux équations à deux inconnues x et y

$$(1)\ \varphi(x,y)=0,$$
$$(2)\ \psi(x,y)=0;$$

chacune d'elles définit une courbe.

Au système de ces deux équations, on peut substituer une infinité de systèmes équivalents; prenons en particulier le système

$$(1)\ \varphi(x,y)=0,$$
$$(3)\ f(x)=0,$$

formé de l'une des équations proposées et de celle que l'on obtient en éliminant entre elles la variable y. Les racines réelles de l'équation (3) sont, en général, les abscisses des points communs aux courbes (1) et (2). Cependant si le système des équations (1) et (3) était vérifié par un couple de valeurs de la forme $x=\alpha$, $y=\beta+\gamma i$, dans lequel les quantités α, β, γ sont réelles, ces valeurs vérifieraient le système des équations (1) et (2); mais la quantité α ne serait pas l'abscisse d'un point commun aux deux courbes. L'exception que nous venons de signaler ne se présente jamais lorsque l'équation $\varphi(x,y)=0$ est une équation algébrique ne renfermant la variable y qu'au premier degré.

387—L'équation à une seule inconnue

$$f(x)=0,$$

qu'il s'agit de résoudre, étant donnée, on peut choisir d'une infinité de manières différentes les courbes déterminées par les équations (1) et (2). La seule condition à remplir, c'est que l'élimination de y entre les équations (1) et (2) donne l'équation proposée. Une première combinaison est

$$y=f(x),$$
$$y=0;$$

elle revient à considérer les valeurs de l'inconnue comme étant les abscisses des points de rencontre de la courbe

$$y=f(x)$$

avec l'axe des x. Cette combinaison est rarement la plus simple. On démontre en algèbre que si on élimine une inconnue y entre deux équations algébriqnes à deux inconnues dont les degrés sont m et n, l'équation en x est généralement du degré mn. Par conséquent, si l'équation proposée est algébrique et que l'on veuille obtenir ses racines par des intersections de courbes algébriques, le produit des degrés des équations des deux courbes devra être égal au degré de l'équation à résoudre. Nous allons appliquer la méthode à la résolution de l'équation du quatrième degré.

388—L'équation du quatrième degré se ramène aisément à la forme

$$(1)\quad x^4+px^2+qx+r=0;$$

on peut la considérer comme provenant de l'élimination de y entre les deux équations du second degré

$$(2)\quad x^2-my=0,$$

$$(3)\quad m^2y^2+pmy+qx+r=0,$$

qui définissent chacune une parabole. L'équation (2) ne renfermant y qu'au premier degré, toutes les racines réelles de l'équation (1) sont des abscisses de points communs aux deux courbes.

On peut remplacer la parabole (3) par une autre courbe du second degré passant par les points communs aux courbes (2) et (3). L'équation générale des courbes du second degré satisfaisant à cette condition est

$$(4)\quad \lambda x^2+m^2y^2+qx+m(p-\lambda)y+r=0,$$

λ étant un paramètre arbitraire. Si l'on pose $\lambda=m^2$, la courbe (4) ne pourra être qu'une circonférence de cercle. On obtient les coordonnées α et β du centre et le rayon R de cette circonférence par les formules

$$(5)\quad \alpha=-\frac{q}{2m^2},\quad \beta=\frac{m^2-p}{2m},\quad R^2=\alpha^2+\beta^2-r,$$

que l'on construira, si les coefficients des équations ne renferment que des irrationnelles du second degré.

Lorsque la valeur de R^2 est positive, l'équation (4) représente

effectivement un cercle, et les racines réelles de l'équation (1) sont les abscisses des points de rencontre de ce cercle et de la parabole (2). Lorsque R^2 est négatif, l'équation (4) n'ayant pas de solutions réelles (nº 85), il en est de même du système des équations (3) et (2) ou du système équivalent des équations (1) et (2); les quatre racines de l'équation proposée sont imaginaires.

389—Considérons maintenant l'équation du troisième degré ramenée à la forme

$$x^3+px+q=0.$$

Si l'on multiplie par x, ce qui introduit la racine $x=0$, dont on ne tiendra pas compte, on obtient l'équation du quatrième degré

$$x^4+px^2+qx=0\ ;$$

à laquelle on appliquera la méthode précédente. La valeur de R^2 étant égale à $\alpha^2+\beta^2$ est toujours positive. Le cercle et la parabole passent à l'origine des coordonées; l'abscisse de ce point est la racine 0, que l'on doit écarter.

La même parabole $x^2-my=0$ peut servir pour la résolution de toutes les équations du troisième ou du quatrième degré; le cercle seul change suivant les valeurs des coefficients de l'équation proposée. Cette méthode ne peut être employée, avec avantage, que lorsque l'on doit résoudre successivement un grand nombre d'équations; alors on trace avec beaucoup de soin une parabole ayant un paramètre arbitraire; et, dans chaque exemple particulier, il ne reste plus qu'à déterminer le cercle.

CONSTRUCTION DES SOLUTIONS DE DEUX ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A DEUX INCONNUES.

390—L'élimination de y entre deux équations du second degré à deux inconnues x et y conduit en général à une équation du quatrième degré en x, dont il est impossible de construire les racines par la règle et le compas. Cette construction pourra se faire comme nous l'avons vu, au moyen d'une parabole et d'un cercle; cependant, si la courbe representée par

l'une des équations proposées est déjà tracée, on préfère s'en servir pour la résolution.

Exemple I.—*Mener une normale à une parabole par un point donné* P. Soit

$$(1)\quad y^2=2px$$

l'équation de la parabole, x_1 et y_1 les coordonnées du point P; si l'on désigne par x et y les coordonnées du pied M de la normale, par X et Y les coordonnées courantes, cette normale a pour équation

$$Y-y=-\frac{y}{p}(X-x).$$

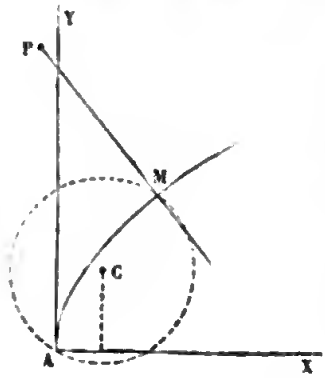


Fig. 217.

Comme elle doit passer par le point p, on a la relation

$$y_1-y=-\frac{y}{p}(x_1-x),$$

ou

$$(2)\quad xy=(x_1-p)y+py_1,$$

qui, jointe à l'équation (1), détermine les inconnues x et y. On aurait donc à considérer l'intersection de la parabole par une hyperbole.

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (2) par y, et si l'on remplace y^2 par $2px$, on obtient une autre parabole

$$(3)\quad x^2=(x_1-p)x+\frac{y_1}{2}y.$$

Enfin, en ajoutant membre à membre les équations (2) et (3), on obtient un cercle

$$(4)\quad x^2+y^2=(x_1+p)x+\frac{y_1}{2}y.$$

Ce cercle, par son intersection avec la parabole donnée, déterminera le point M.

Exemple II.—*Mener une normale à une ellipse par un point donné* P. Soit

$$(1)\quad a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0,$$

l'équation de l'ellipse; en conservant les mêmes notations que dans l'exemple précédent, on voit que le pied M de la nor-

male est déterminé par l'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole

$$(2)\quad c^2xy = a^2x_1y - b^2y_1x.$$

L'élimination de y conduit à l'équation

$$(3)\quad x^4 - 2\frac{a^2}{c^2}x_1x^3 + \frac{a^2}{c^4}(a^2x_1^2 + b^2y_1^2 - c^4)x^2 + 2\frac{a^4}{c^2}x_1x - \frac{a^6}{c^4}x_1^2 = 0.$$

Si l'on élimine y entre l'équation (1) et celle du cercle

$$(4)\quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0,$$

on trouve

$$(5)\quad x^4 - 4\frac{a^2}{c^2}\alpha x^3 + \frac{a^2}{c^4}(4a^2\alpha^2 + 4b^2\beta^2 + 2c^2p^2)x^2 - 4\frac{a^4}{c^4}p^2\alpha x + \frac{a^4}{c^4}(p^4 - 4b^2\beta^2) = 0,$$

en posant pour abréger

$$(6)\quad p^2 = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 + b^2.$$

On ne peut pas en général identifier les équations (3) et (5); car on aurait quatre équations entre les trois paramètres arbitraires α, β, r; mais si l'on remplace dans l'équation (3) x par mx, m étant un nombre arbitraire, l'identification devient possible. On l'opère en posant

$$(7)\quad 2\alpha = \frac{x_1}{m},\quad 4a^2\alpha^2 + 4b^2\beta^2 + 2c^2p^2 = \frac{1}{m^2}(a^2x_1^2 + b^2y_1^2 - c^4),$$

$$-2\frac{p^2\alpha}{c^2} = \frac{x_1}{m^3},\quad p^4 - 4b^2\beta^2 = -\frac{a^2x_1^2}{m^4};$$

d'où l'on tire

$$m^2 = \frac{a^2x_1^2 + c^4}{b^2y_1^2 + c^4},\quad \alpha = \frac{x_1}{2m},\quad \beta = \frac{1}{2bm^2}\sqrt{c^4 + a^2x_1^2},$$

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + b^2 + \frac{c^2}{m^2}.$$

Désignons en outre par f et g les deux quantités $\frac{ax_1}{c}$, $\frac{by_1}{c}$, la valeur de m^2 devient

$$m^2 = \frac{f^2 + c^2}{g^2 + c^2},$$

et les formules précédentes se construisent facilement.

Les abscisses des pieds des normales ne sont pas les mêmes que celles des points de rencontre de l'ellipse et du cercle, mais on les obtient en multipliant les dernières par m.

Si le point P vérifiait l'équation

$$a^2x_1^2=b^2y_1^2 \quad \text{ou} \quad y_1=\pm\frac{a}{b}x_1,$$

on aurait $m=1$; donc les points des deux droites $y_1=\pm\frac{a}{b}x_1$ jouissent de cette propriété que les pieds des normales menées par chacun d'eux sont situés sur une circonférence de cercle.

Il est des cas où la construction des solutions de deux équations du second degré à deux inconnues peut être effectuée avec la règle et le compas; nous avons déjà signalé ces cas particuliers quand nous nous sommes occupés de l'intersection de deux courbes du second degré.

RÉSOLUTION GRAPHIQUE DES ÉQUATIONS.

391— Dans ce qui précède nous avons supposé que les inconnues sont des lignes et que les équations sont homogènes par rapport à ces lignes et aux paramètres linéaires dont dépendent les coefficients. On peut se servir des mêmes procédés pour déterminer approximativement les racines d'une équation numérique, c'est-à-dire d'une équation qui ne renferme qu'une seule lettre x, laquelle désigne un nombre inconnu. Si l'on prend une longueur arbitraire pour unité, on imaginera que le nombre inconnu x est la mesure d'une certaine ligne; on construira cette ligne ; en la mesurant ensuite à l'aide de l'échelle choisie, on aura le nombre cherché.

Exemple I.—*Résoudre l'équation*

$$x^3-2x-5=0.$$

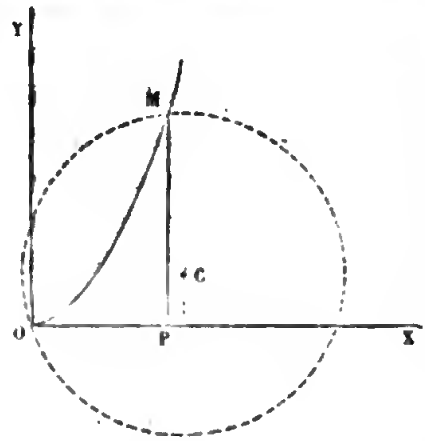


Fig. 217.

Au moyen d'une échelle bien faite, construisons une fois pour toutes la parabole $x^2=y$, dont nous nous servirons constamment. Décrivons le cercle dont le centre C a pour coordonnées $\alpha=\frac{5}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$, et qui passe à l'origine ; ce cercle coupe la pa-

rabole en un seul point M; donc l'équation proposée n'a qu'une racine réelle, l'abscisse OP du point M. En mesurant cette longueur au moyen de l'échelle employée, on trouve $x=2,09$. Une bonne échelle permet d'évaluer les centièmes. On a de la sorte la racine de l'équation proposée à un centième près.

Exemple II.— *Résoudre l'équation*

$$x^3-5x+1=0.$$

Décrivons le cercle dont le centre C a pour coordonnées $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=3$, et qui passe par l'origine ; ce cercle coupe la parabole en trois points; on en conclut que l'équation a ses trois racines réelles; en mesurant les abscisses, on trouve que les deux racines positives sont 0,20 et 2,13 à un centième près.

ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

302—Soit l'équation

$$x \tang x=1.$$

Cette équation résulte de l'élimination de y entre les deux suivantes.

$$y=\tang x, \quad xy=1.$$

La première représente une courbe composée d'une infinité de branches égales qui ont des asymptotes perpendiculaires à l'axe des x; la seconde une hyperbole équilatère. Les racines de l'équation (1) sont les abscisses des points d'intersection.

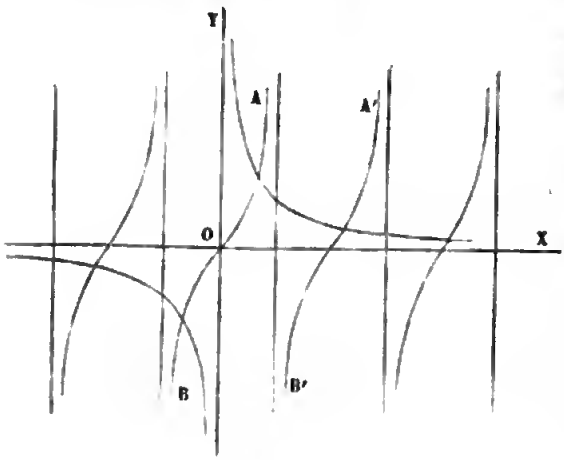


Fig. 219.

Il est évident que la branche de droite de l'hyperbole rencontre au moins une fois chacune des

branches OA, B'A', B''A'' .... de la courbe transcendante; d'ailleurs, il n'y a sur chaque branche qu'un seul point de rencontre, car lorsque x varie, les ordonnées des deux courbes varient en sens contraire; si ces ordonnées sont égales pour une certaine valeur de x, elles sont nécessairement inégales pour toute valeur différente. Les racines de l'équation sont deux à deux égales et de signes contraires; il ya une première racine positive comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, une seconde entre π et $3\frac{\pi}{2}$, une troisième entre 2π et $5\frac{\pi}{2}$, etc.....; le nombre des racines est infini, en appelant x_n le $n^{\text{ième}}$ racine, la différence entre $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ et x_n est très-petite lorsque n est très-grand. La courbe donne, pour valeur de la première, 0,86 à un centième près.

On pourrait aussi se servir des deux équations

$$y = tang\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad y = x;$$

et, en posant $\frac{\pi}{2} - x = x'$,

$$y = tang\, x', \quad y = \frac{\pi}{2} - x'.$$

L'hyperbole serait remplacée par une ligne droite.

Le tracé de la courbe transcendante

$$y = tang\, x,$$

pour obtenir les racines réelles de l'équation

$$x\, tang\, x = 1$$

n'offre quelque avantage que lorsque l'on doit résoudre un grand nombre d'équations de la même forme, ou du moins pour lesquelles cette courbe peut être employée avec une autre ligne facile à construire.

393—Remarques.—Les procédés graphiques que nous venons d'indiquer ne donnent jamais les valeurs des inconnues

avec une bien grande précision; on ne doit pas espérer une approximation plus grande que un centième de la racine.

On se sert quelquefois de deux courbes tracées grossièrement pour déterminer le nombre des racines réelles d'une équation. Or tant que l'on n'a pas étudié avec soin la forme des deux courbes, on ne peut déduire aucune conclusion rigoureuse de cette construction. En général la discussion des courbes et la détermination de leurs points de rencontre présente les mêmes difficultés que la question proposée.

FIN DE LA GÉOMÉTRIE PLANE.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE
DANS L'ESPACE

LIVRE V

CHAPITRE I
Des Coordonnées

On détermine la position d'un point dans l'espace au moyen de *trois* quantités que l'on nomme les *coordonnées* du point.

COORDONNÉES RECTILIGNES.

394—Soient XOY, YOZ, ZOX trois plans fixes, qui se coupent deux à deux suivant les droites X'X, Y'Y, Z'Z; trois plans mobiles MD, ME, MF, parallèles à ces plans fixes, déterminent par leur intersection un point M de l'espace; la position de chaque plan mobile est déterminée par sa distance au plan fixe auquel il est parallèle, distance comptée parallèlement à l'intersection des deux autres plans fixes. Les trois distances OD, OE, OF, qui déterminent la position des plans mobiles, distances affectées du signe + ou du signe —, suivant qu'elles sont portées dans

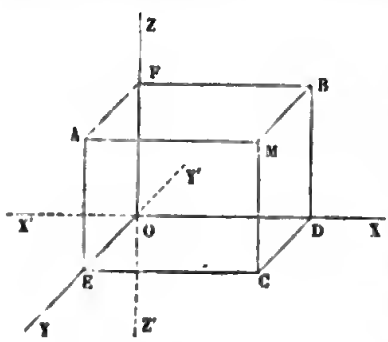


Fig. 220.

les directions OX, OY, OZ, ou dans les directions opposées OX′, OY′, OZ′, sont les trois coordonnées rectilignes du point M; on les désigne ordinairement par les lettres x, y, z. Par leurs rencontres mutuelles, les trois plans fixes forment huit angles trièdres, et on obtient tous les points de l'espace en faisant varier x, y, z de $-\infty$ à $+\infty$.

Les plans mobiles forment avec les plans fixes un parallépipède ayant pour arêtes des longueurs égales aux valeurs absolues des coordonnées du point M; les points A, B, C sont les projections du point M sur chacun des plans fixes, parallèlement à l'intersection des deux autres; l'un d'eux, A par exemple, a pour coordonnées, relativement aux axes OY, OZ, deux des coordonnées y et z du point M. Les points D, E, F sont les projections du point M sur chacun des trois axes OX, OY, OZ, parallèlement au plan des deux autres; de sorte que les lettres x, y, z désignent les projections du rayon OM sur les axes des coordonnées, pourvu que l'on regarde les projections comme positives lorsqu'elles sont comptées sur les directions OX, OY, OZ, comme négatives dans le cas contraire.

Ordinairement les trois plans fixes, et par suite les trois axes, sont rectangulaires deux à deux; alors le parallépipède est rectangle, et les projections sont orthogonales.

COORDONNÉES POLAIRES.

395—Soient encore trois axes rectangulaires OX, OY, OZ; la position du point M pourra être déterminée par la longueur ρ du rayon vecteur OM, l'angle θ que fait ce rayon vecteur avec l'axe OZ, et enfin l'angle ψ du plan ZOM avec le plan fixe ZOX. Si ON est la projection de OM sur le plan XOY, l'angle XON mesure l'angle dièdre ψ; on le compte dans un sens convenu, par exemple en tournant de OX vers OY.

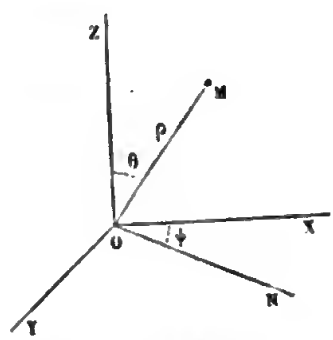


Fig. 221.

REPRÉSENTATION DES SURFACES PAR DES ÉQUATIONS.

396—Considérons une surface quelconque dans l'espace. Par un point O, menons trois axes fixes OX, OY, OZ ; dans le plan XOY prenons un point P arbitraire, et par ce point menons une parallèle PM à l'axe OZ jusqu'à sa rencontre avec la surface au point M ; la longueur de l'ordonnée PM est parfaitement déterminée. Quand le point P se déplace dans le plan XOY, l'ordonnée PM varie simultanément. Mais puisque le point P se déplace d'une manière arbitraire dans le plan, ses coordonées x et y sont deux variables indépendantes; il en résulte que l'ordonnée z d'un point M de la surface est une fonction des deux autres coordonnées x et y considérées comme deux variables indépendantes. On conçoit que l'on puisse, de la définition géométrique de la surface, déduire une équation entre x, y, z, servant à définir la fonction z de x et de y. Cette équation s'appelle l'équation de la surface.

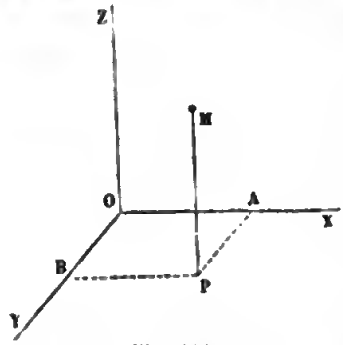


Fig. 222.

397—Supposons réciproquement que l'on donne une équation

$$f(x,y,z)=0$$

entre les trois coordonnées ; chaque système de valeurs réelles qui satisfont à cette équation détermine un point de l'espace ; l'ensemble de toutes les solutions réelles constitue un système de points qui forme, en général, une surface.

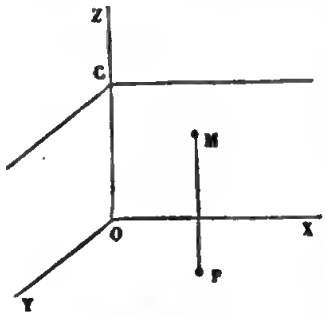


Fig. 223.

En effet, considérons d'abord le cas où l'équation, ne renfermant qu'une seule des coordonnées, z par exemple, est de la forme $z=c$. Puisque les coordonnées x et y sont arbi-

traires, par un point P quelconque du plan XOY on mènera une ordonnée constante PM; le lieu des points M est évidemment un plan parallèle au plan XOY. Supposons maintenant que l'équation renferme deux coordonnées, x et y par exemple.

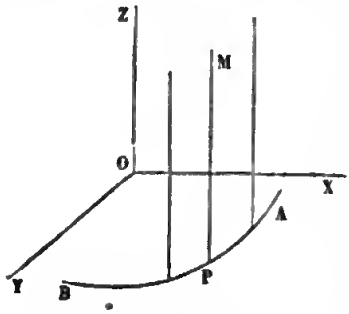


Fig. 224.

L'équation $f(x, y)=0$, dans le plan XOY, représente une ligne AB. Par un point quelconque de cette ligne, menons une parallèle PM à l'axe OZ; puisque l'ordonnée z, qui n'entre pas dans l'équation, est arbitraire, les coordonnées de tous les points de la droite PM satisfont à l'équation. Donc l'équation $f(x, y)=0$ représente dans l'espace un cylindre parallèle à l'axe OZ.

Considérons enfin un équation $f(x, y, z)=0$ entre les trois coordonnées. A une distance arbitraire $OC=c$, menons un plan ACB parallèle au plan XOY; les coordonnées x et y de tous les points du lieu situés dans ce plan doivent satisfaire à l'équation $f(x, y, c)=0$; or, cette équation représente dans le plan ACB une ligne AB. Si l'on donne à z une valeur c' voisine de c, on aura dans le plan A'C'B' une seconde courbe A'B' qui différera très-peu de la précédente.

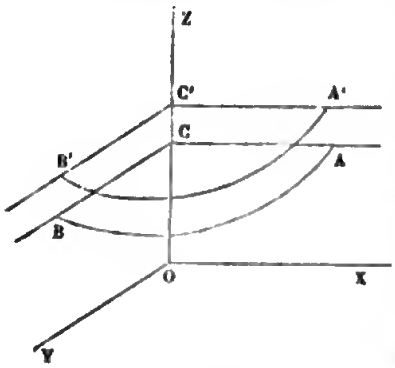


Fig. 225.

En général, quand z varie d'une manière continue entre certaines limites, on a une série continue de courbes, lesquelles forment une surface.

Par cette méthode, non-seulement on démontre l'existence de la surface, mais encore on se fait une idée assez exacte de sa forme, à l'aide d'une série de coupes paralleles que l'on représente par leurs projections sur l'un des plans des coordonnées.

REPRÉSENTATION DES LIGNES.

398—Une ligne dans l'espace peut être regardée comme l'intersection de deux surfaces; on représentera donc cette ligne par un système de deux équations simultanées

$$(1)\quad f(x, y, z)=0, \quad f_1(x, y, z)=0.$$

Le système (1) peut être remplacé par une infinité d'autres équivalents, par exemple par le suivant,

$$f=0, \quad f+\lambda f_1=0,$$

dans lequel λ désigne une constante quelconque, c'est-à-dire que la surface $f+\lambda f_1=0$, passe, quelle que soit λ, par la ligne d'intersection des deux premières.

Si, entre les deux équations (1), on élimine successivement x et y, on aura deux équations

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi(x, z)=0, \\ \psi(y, z)=0, \end{cases}$$

qui représentent les deux cylindres projetants de la ligne sur le plan des xz, et sur celui des yz. Ces deux cylindres, par leur intersection, déterminent la ligne.

La représentation des figures dans l'espace par des symboles algébriques permet d'étendre aux figures à trois dimensions les méthodes analytiques employées dans l'étude des figures planes.

DIRECTION D'UNE DROITE.

399—Pour déterminer dans l'espace une direction OI, que l'on peut supposer appartenir à une droite passant à l'origine, on donne les angles α, β, γ de cette direction avec les trois directions OX, OY, OZ des coordonnées positives. Deux de ces angles ne suffisent pas ; car si l'on décrit autour de OX et de OY deux demi-cônes dont les angles au sommet soient respectivement α et β, ces deux cônes se coupent suivant deux

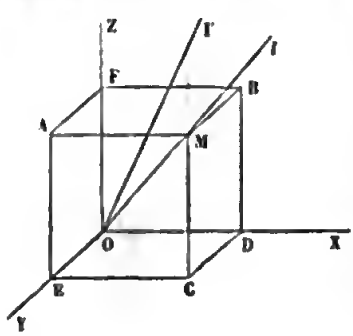


Fig. 226.

génératrices placées symétriquement par rapport au plan XOY; la connaissance de γ est donc indispensable. Il est évident d'ailleurs que ces trois angles ne sont pas tous arbitraires, et que, lorsque deux d'entre eux sont connus, le troisième ne peut avoir au plus que deux valeurs distinctes. Au lieu des angles, on peut prendre leurs cosinus, puisque de 0 à π il n'y a qu'un seul angle ayant un cosinus donné. Les sinus, au contraire, laisseraient de l'ambiguïté.

400—Considérons d'abord le cas où les coordonnées sont rectangulaires. Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de la droite OI, et appelons l la distance OM. Les coordonnées du point M sont les arêtes OD, OE, OF du parallélipipède rectangle dont OM est la diagonale, affectées de signes convenables; ce sont aussi les projections orthogonales de la diagonale OM sur les axes; on a donc

$$x = l\cos\alpha, \quad y = l\cos\beta, \quad z = l\cos\gamma.$$

Mais on sait que le carré de la diagonale d'un parallélipipède rectangle est égal à la somme des carrés des trois arêtes, ce qui donne

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2;$$

remplaçant x, y, z par leurs valeurs, et supprimant le facteur l^2, on obtient la relation

$$(1) \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

qui existe entre les cosinus des angles formés par une même direction avec les axes rectangulaires.

401—Appelons α', β', γ' les angles que fait une seconde direction OI′ avec les mêmes axes, et cherchons l'angle V des deux directions OI, OI′. Les projections de la droite OM et de la ligne brisée ODCM sur la droite OI′ étant égales, on a

$$l\cos V = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma',$$

ou, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs,

$$(2) \quad \cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

Les directions OI, OI′ sont perpendiculaires entre elles, si la condition

$$(3)\quad \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0$$

est vérifiée.

402—Supposons maintenant les coordonnées obliques, et désignons pour λ, μ, ν les trois angles YOZ, ZOX, XOY, que font les axes deux à deux. En projetant orthogonalement sur chacun des trois axes la droite OM et la ligne brisée ODCM, on a

$$(4)\quad \begin{cases} l\cos\alpha = \quad x + y\cos\nu + z\cos\mu, \\ l\cos\beta = x\cos\nu + y \quad + z\cos\lambda, \\ l\cos\gamma = x\cos\mu + y\cos\lambda + z \quad ; \end{cases}$$

en projetant ces mêmes lignes sur la droite OI, on a

$$(5)\quad l = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Si des équations (4), on tire les valeurs de x, y, z,

$$(6)\quad x = \frac{\cos\alpha(1-\cos^2\lambda) + \cos\beta(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + \cos\gamma(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu)}{1-\cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}\, l,$$

et qu'on les substitue dans l'équation (5), on obtient la relation

$$(7)\quad \cos^2\alpha\sin^2\lambda + \cos^2\beta\sin^2\mu + \cos^2\gamma\sin^2\nu + 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)$$
$$+ 2\cos\beta\cos\gamma(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + 2\cos\gamma\cos\alpha(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)$$
$$= 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$

entre les trois angles formés par une direction quelconque avec les axes obliques.

Si dans l'équation (5) on remplace $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par leurs valeurs tirées des équations (4), on a la formule

$$(8)\quad l^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$

qui donne la distance OM.

En projetant sur la droite OI′ la droite OM et la ligne brisée ODCM, on a, comme précédemment,

$$l\cos V = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma';$$

en remplaçant x, y, z par leurs valeurs (6), on obtient la formule

$$(9)\quad \cos V = \frac{\cos\alpha\cos\alpha'\sin^2\lambda + \cos\beta\cos\beta'\sin^2\mu + \cos\gamma\cos\gamma'\sin^2\nu + (\cos\alpha\cos\beta' + \cos\beta\cos\alpha')(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + \ldots}{1-\cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}$$

qui donne l'angle des deux directions.

Le dénominateur commun ou le déterminant des formules (6)

peut être mis sous une forme remarquable qu'il est bon de connaître ; on a

$$
\begin{aligned}
&1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu \\
&=(1-\cos^2\lambda)(1-\cos^2\mu)-\cos^2\lambda\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu \\
&=\sin^2\lambda\sin^2\mu-(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)^2 \\
&=(\sin\lambda\sin\mu-\cos\lambda\cos\mu+\cos\nu)(\sin\lambda\sin\mu+\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu) \\
&=[\cos\nu-\cos(\lambda+\mu)][\cos(\lambda-\mu)-\cos\nu] \\
&=4\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}.
\end{aligned}
$$

CHAPITRE II.

Transformation des Coordonnées.

DÉPLACEMENT DE L'ORIGINE.

403—On veut remplacer les trois axes OX, OY, OZ par trois autres axes O'X', O'Y', O'Z', respectivement parallèles aux premiers et dirigés dans le même sens. La position des nouveaux axes sera déterminée par les coordonnées a, b, c de la nouvelle origine O', relativement aux anciens axes. Appelons x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de l'espace par rapport aux anciens axes, x', y', z' les coordonnées du même point par rapport aux nouveaux axes ; en projetant successivement sur chacun des trois axes primitifs, parallèlement au plan des deux autres, la droite OM et la ligne brisée OO'M, on a les relations

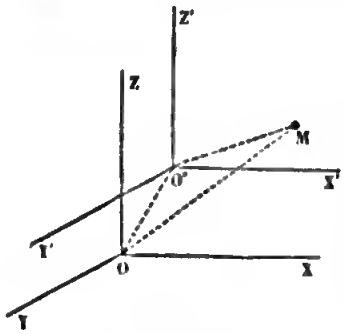


Fig. 227.

$$
(1)\quad \begin{cases} x=a+x', \\ y=b+y', \\ z=c+z'. \end{cases}
$$

CHANGEMENT DE LA DIRECTION DES AXES.

404—Considérons maintenant le cas où l'on change la di-

rection des axes, l'origine demeurant la même. Désignons par a, a', a'' les cosinus des angles que fait l'axe OX' avec les trois axes OX, OY, OZ, par b, b', b'' et c, c', c'' les quantités analogues pour OY' et OZ', et enfin par λ, μ, ν les angles YOZ, ZOX, XOY.

Soit M un point quelconque de l'espace; par le point M, menons une parallèle MC à l'axe OZ, et par le point C où cette droite perce le plan XOY, une parallèle CD à l'axe OY; les trois longueurs OD, DC, CM, prises avec les signes convenables, sont les coordonnées x, y, z du point M, par rapport aux anciens axes. Par le point M menons une parallèle MC' à l'axe OZ', et par le point C' où elle perce le plan X'OY', une parallèle C'D' à l'axe OY'; les trois longueurs OD', DC', C'M, prises avec les signes convenables, sont les coordonnées x', y', z' du point M, par rapport aux nouveaux axes. En projetant les deux lignes brisées ODCM, OD'C'M, successivement sur chacun des trois axes OX, OY, OZ, on obtient les trois relations

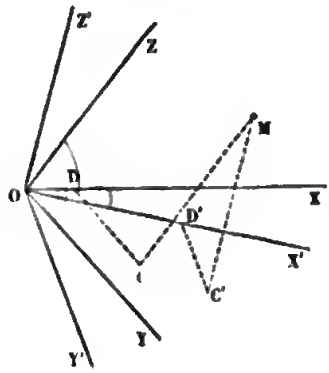


Fig. 228.

$$(2)\quad \begin{cases} x+y\cos\nu+z\cos\mu=a\,x'+b\,y'+c'z', \\ x\cos\nu+y\qquad+z\cos\lambda=a'x'+b'\,y'+c'\,z', \\ x\cos\mu+y\cos\lambda+z\qquad=a''x'+b''y'+c''z', \end{cases}$$

desquelles on peut déduire pour x, y, z des expressions du premier degré en x', y', z'. Le déterminant de ces équations est le même que celui des équations du n° 402.

Il faut se rappeler que a, a', a'' ne sont pas arbitraires, mais liées par une équation de condition; il en est de même de b, b', b'' et de c, c', c''. Il y aurait entre ces mêmes quantités trois nouvelles relations, si l'on voulait que les nouveaux axes fussent rectangulaires, ou plus généralement, qu'ils fissent deux à deux des angles donnés.

405—Quand les axes primitifs sont rectangulaires, on a

$\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, les équations (2) se réduisent à

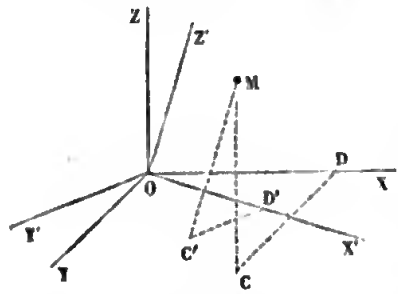


Fig. 229.

$$(3)\quad \begin{cases} x = ax' + by' + cz', \\ y = a'x' + b'y' + c'z', \\ z = a''x' + b''y' + c''z'. \end{cases}$$

Alors, les relations entre les cosinus sont

$$(4)\quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1. \end{cases}$$

Si les nouveaux axes sont aussi rectangulaires, on a en outre les relations

$$(5)\quad \begin{cases} ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ ca + c'a' + c''a'' = 0. \end{cases}$$

Si l'on multiplie les deux membres des équations (3) par a, a', a'', puis par b, b', b'', et c, c', c'', et qu'on ajoute, il vient, en ayant égard aux relations (4) et (5),

$$(6)\quad \begin{cases} x' = ax + a'y + a''z, \\ y' = bx + b'y + b''z, \\ z' = cx + c'x + c''z. \end{cases}$$

On obtient ces formules directement en projetant les lignes brisées ODCM, OD'C'M sur les axes OX', OY', OZ'.

Puisque les nouveaux axes sont rectangulaires, les quantités (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), qui désignent les cosinus des angles des directions OX, OY, OZ avec les nouveaux axes, doivent satisfaire aux relations

$$(7)\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1; \end{cases} \qquad (8)\quad \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \\ a''a + b''b + c''c = 0; \end{cases}$$

analogues aux relations (4) et (5).

406—Des relations précédentes entre les neuf cosinus, on en déduit un grand nombre d'autres parmi lesquelles nous citerons les suivantes, qui sont particulièrement utiles. En éliminant c'' entre les deux dernières des équations (5), on a

$$\frac{c}{a'b''-b'a''}=\frac{c'}{a''b-b''a},$$

et, par symétrie,

$$\frac{c}{a'b''-b'a''}=\frac{c'}{a''b-b''a}=\frac{c''}{ab'-ba'}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}}{\sqrt{(a'b''-b'a'')^2+(a''b-b''a)^2+(ab'-ba')^2}}.$$

Mais on a

$$(a'b''-b'a'')^2+(a''b-b''a)^2+(ab'-ba')^2$$
$$=(a^2+a'^2+a''^2)(b^2+b'^2+b''^2)-(ab+a'b'+a''b'')^2=1.$$

Il en résulte

$$(9)\quad \frac{c}{a'b''-b'a''}=\frac{c'}{a''b-b''a}=\frac{c''}{ab'-ba'}=\pm 1.$$

On prendra l'un ou l'autre signe suivant la disposition du trièdre OX'Y'Z'. Quand on fait coïncider OX' avec OX, OY' avec OY, OZ' prendra la direction OZ ou la direction opposée. Dans le premier cas, puisque $a=b'=c''=1$, $a'=a''=b=b''=c=c'=0$, il faut prendre le signe $+$; dans le second cas, le signe $-$. Ces formules (9) déterminent une direction OZ' perpendiculaire à deux droites rectangulaires OX', OY'.

FORMULES D'EULER.

407—Les formules précédentes, pour passer d'un système rectangulaire à un autre également rectangulaire, offrent l'avantage d'être symétriques par rapport aux angles; mais, quoique les angles soient au nombre de neuf, il n'y en a réellement que trois arbitraires, c'est pourquoi il ne faut jamais perdre de vue les relations qui les lient. Cette dépendance des neuf cosinus est, dans certains cas, un obstacle à constater l'identité de deux expressions. On a donc cherché des formules, dans lesquelles n'entrent que trois constantes; le choix de celles-ci était naturellement indiqué dans plusieurs questions de mécanique et d'astronomie, où l'on emploie de préférence les nouvelles formules.

On peut déterminer la position des nouveaux axes par l'an-

gle ψ que fait avec OX la trace OA du plan X'OY' sur le plan XOY, l'inclinaison θ du plan X'OY' sur le plan XOY, inclinaison mesurée par l'angle ZOZ', enfin l'angle φ de l'axe OX' avec la trace OA.

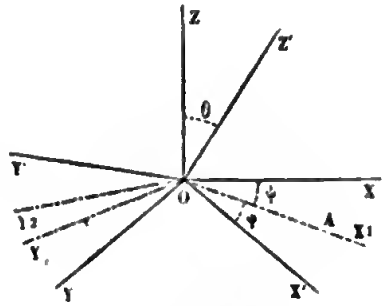


Fig. 230.

Or, il est possible d'amener le premier système sur le second, par trois rotations successives. Faisons tourner d'abord les axes primitifs de l'angle ψ autour de OZ; tandis que l'axe OZ reste immobile, les axes OX et OY tournent dans leur plan de l'angle ψ; l'axe OX vient donc occuper la position OA ou OX_1, et OY une certaine position OY_1. Remarquons que l'axe OZ', perpendiculaire sur le plan X'OY', et par suite sur la trace OA, est contenu dans le plan Y_1OZ perpendiculaire à OA. Actuellement, faisons tourner de l'angle θ autour de OA; tandis que l'axe OX_1 reste immobile, les deux axes OY_1 et OZ tournent dans leur plan de l'angle θ; donc OZ vient occuper la position OZ', et OY_1 une certaine position OY_2. Remarquons que les plans X_1OY_2 et X'OY', tous deux perpendiculaires sur OZ', coïncident. Enfin, faisons tourner de l'angle φ autour de OZ'; puisque les deux axes OX_1, OY_2 tournent dans leur plan de l'angle φ, il en résulte que OX_1 vient se placer sur OX', et OY_2 sur OY'. Après ces trois rotations successives, les axes primitifs coïncident avec les axes nouveaux.

On a, de cette manière, quatre systèmes d'axes à considérer, savoir : OXYZ, OX_1Y_1Z, OX_1Y_2Z', OX'Y'Z'.

Puisque deux systèmes consécutifs ont un axe commun, on passera de l'un à l'autre par les formules de transformation employées dans la Géométrie plane. On a ainsi, pour les transformations successives,

$$x=x_1\cos\psi-y_1\sin\psi,\quad y_1=y_2\cos\theta-z'\sin\theta,\quad x_1=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,$$
$$y=x_1\sin\psi+y_1\cos\psi,\quad z=y_2\sin\theta+z'\cos\theta,\quad y_2=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi.$$

L'élimination des auxiliaires x_1, y_1, y_2 donne

$$(10)\quad \begin{cases} x = x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) + y'(-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) + z'\sin\psi\sin\theta, \\ y = x'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) + y'(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) + z'(-\cos\psi\sin\theta), \\ z = x'\sin\varphi\sin\theta + y'\cos\varphi\sin\theta + z'\cos\theta. \end{cases}$$

Telles sont les formules connues sous le nom de formules d'Euler.

La comparaison de ces formules, avec celles du n° 405, conduit aux relations suivantes :

$$(11)\quad \begin{cases} a = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ a' = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \\ a'' = \sin\varphi\sin\theta; \\ b = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ b' = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta, \\ b'' = \cos\varphi\sin\theta; \\ c = \sin\psi\sin\theta, \\ c' = -\cos\psi\sin\theta, \\ c'' = \cos\theta; \end{cases}$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{a''}{b''}, \quad \operatorname{tang}\psi = -\frac{c}{c'}.$$

408—Remarque. Lorsqu'un corps tourne autour d'un axe fixe, la rotation peut s'effectuer dans deux sens différents qu'il importe de distinguer. Considérons, par exemple, une rotation autour de l'axe OZ ; en vertu de cette rotation, un rayon OA, mobile autour du point O, tournera dans le plan XOY. Imaginons qu'un observateur soit placé sur l'axe OZ, les pieds en O, la tête en Z ; cet observateur verra le rayon mobile OA tourner, soit de gauche à droite, soit de droite à gauche en passant devant lui ; on dira que la rotation est directe pour l'observateur dans le premier cas, inverse dans le second cas. Dans la figure, la rotation est directe, si OA tourne de OX vers OY dans le sens indiqué par la flèche ; elle est inverse, si OA tourne en sens contraire.

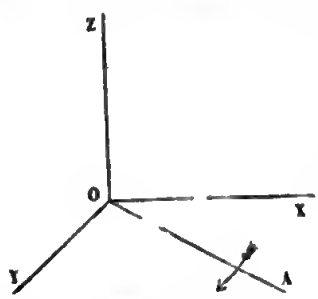


Fig. 231.

Deux systèmes d'axes rectangulaires OXYZ, OX'Y'Z', ne sont pas toujours susceptibles de coïncider. Pour le reconnaître, imaginons deux observateurs placés l'un sur OZ, l'autre sur OZ'; le premier observant la rotation de OX vers OY, le second celle de OX' vers OY'; si les deux rotations s'effectuent dans le même sens, par exemple dans le sens direct, comme cela a lieu dans la figure du numéro précédent, les deux systèmes d'axes peuvent coïncider. En effet, si l'on place OZ sur OZ', et si l'on fait tourner autour de l'axe commun, de manière à amener OX sur OX', nécessairement OY coïncidera avec OY'; car OY et OY' forment tous deux un angle droit avec OX ou OX' dans le même sens. Mais si les deux rotations étaient de sens contraire, après avoir fait coïncider OZ avec OZ', OX avec OX', on verrait OY se placer, non plus sur OY', mais sur son prolongement.

Dans les formules d'Euler, on suppose que les deux systèmes d'axes rectangulaires offrent la même disposition, c'est-à-dire sont susceptibles de coïncider. On a amené le système primitif sur le système nouveau, par trois rotations directes. L'angle ψ de la rotation autour de OZ varie de 0 à 2π; l'angle θ de la rotation autour de OA est compris entre 0 et π, pourvu que sur l'intersection des plans XOY et X'OY' on choisisse convenablement la direction OA; la rotation de φ autour de OZ' varie de 0 à 2π.

409—Formules générales.—Lorsqu'on change à la fois l'origine et la direction des axes, en menant par la nouvelle origine O', dont les coordonnées relativement à l'ancien système sont a, b, c, trois axes OX_1, OY_1, OZ_1, parallèles aux premiers et de même direction, on a $x=a+x_1$, $y=b+y_1$, $z=c+z_1$; ensuite, x_1, y_1, z_1 s'expriment en x', y', z' par l'un des groupes d'équations écrites précédemment; il suffit donc, pour avoir les formules générales, de remplacer dans ces équations x, y, z respectivement par $x-a$, $y-b$, $z-c$.

CLASSIFICATION DES SURFACES.

410—On distingue les surfaces, comme les lignes, en al-

gébriques et transcendantes, suivant que leurs équations sont elles-mêmes algébriques ou transcendantes. Quand l'équation est algébrique, elle peut toujours se ramener à la forme entière, et une transformation d'axes rectilignes ne change pas son degré. Le nombre qui exprime ce degré sert à classer les surfaces en ordres; ainsi, on dit qu'une surface est du premier, du second, du troisième ordre, etc., lorsque son équation est du premier, du second, du troisième degré, etc.

Pour que l'équation algébrique entière du degré m

$$f(x, y, z)=0,$$

représente réellement une surface de l'ordre m, il faut que son premier membre ne puisse pas se décomposer en un produit de deux fonctions entières, ou qu'elle soit irréductible. Deux équations irréductibles distinctes représentent deux surfaces qui peuvent avoir une ou plusieurs lignes communes, mais ces surfaces n'ont jamais d'éléments superficiels communs; car pour avoir des systèmes communs de solutions des deux équations, on ne peut pas prendre arbitrairement, même entre des limites très-resserrées, deux des variables.

Un plan coupe une surface algébrique de l'ordre m suivant une ligne algébrique dont l'ordre ne peut dépasser m; en effet, si l'on rapporte cette surface à un système de trois plans coordonnés, dont fasse partie celui que l'on considère, on obtient l'équation de la ligne d'intersection, par rapport à deux des axes coordonnés, en remplaçant dans l'équation de la surface l'une des coordonnées par zéro; le polynôme à deux variables qui en résulte ne peut évidemment être d'un degré supérieur à m. Si la surface avait dans un plan plus de points qu'il n'en faut pour déterminer une ligne de l'ordre m, le plan tout entier ferait partie de la surface, et l'équation se décomposerait en deux facteurs. Une ligne droite rencontre une surface de l'ordre m en m points au plus, ou bien elle est située tout entière sur la surface.

SECTION D'UNE SURFACE PAR UN PLAN.

411—Supposons d'abord que le plan passe par l'origine,

sa position se détermine comme au n° 407, par les deux angles θ et ψ, tandis que la position des axes OX′, OY′, auxquels on rapporte la courbe, est donnée par l'angle φ. Ordinairement, on fait coïncider l'axe OX′ avec la trace du plan sécant sur le plan XOY, alors on a $\varphi=0$. Dans l'équation de la surface $f(x, y, z)=0$, il faut donc mettre à la place de x, y, z les seconds membres des formules (10), puis faire $\varphi=0$ et $z'=0$, ce qui revient à remplacer simplement x, y, z par les expressions

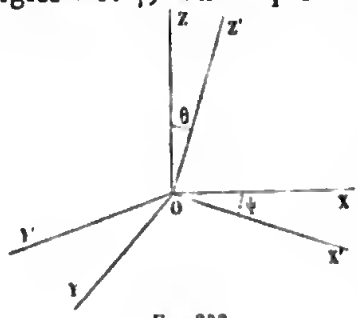


Fig. 232.

$$(12)\quad \begin{cases} x=x'\cos\psi-y'\sin\psi\cos\theta, \\ y=x'\sin\psi+y'\cos\psi\cos\theta, \\ z=y'\sin\theta, \end{cases}$$

que l'on obtient en faisant $\varphi=0$ et $z'=0$ dans les formules (10).

On trouve ces formules directement par deux rotations, l'une ψ autour de OZ, l'autre θ autour de OX′.

Si le plan sécant défini de la même manière, quant à sa direction, au lieu d'être mené par l'origine, passait en un point ayant pour coordonnées a, b, c, dans les formules précédentes, on mettrait $x-a$, $y-b$, $z-c$ à la place de x, y, z.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES RECTILIGNES EN COORDONNÉES POLAIRES.

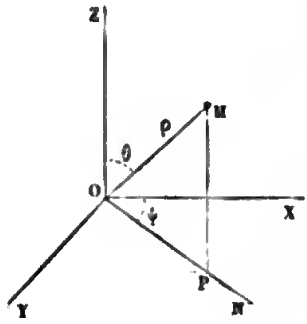


Fig 233.

412—Le système polaire défini au n° 395 étant assez fréquemment employé, il est bon d'indiquer comment on passe du système rectiligne rectangulaire au système polaire, et réciproquement. Considérons le cas où l'axe fixe est OZ, le plan ZOX le plan fixe à partir duquel se comptent les angles ψ. La projection de OM sur OZ est $\rho\cos\theta$, la projection OP de la même ligne sur

le plan XOY est $\rho \sin\theta$; enfin les projections de OP sur les axes OX, OY sont $\rho \sin\theta \cos\psi$, $\rho \sin\theta \sin\psi$. Si donc on projette sur chacun des trois axes la droite OM et la ligne brisée OPM, on obtient les relations

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \rho \cos\psi \sin\theta, \\ y &= \rho \sin\psi \sin\theta, \\ z &= \rho \cos\theta. \end{aligned}\right.$$

On en déduit les formules inverses

$$(14)\quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \tang\psi = \frac{y}{x},\quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Si les deux systèmes occupaient des positions relatives différentes, il faudrait se servir d'un système rectiligne auxiliaire.

Dans le système polaire, une direction OM est complétement déterminée par les deux angles θ et ψ; on s'en sert fréquemment à ce point de vue. En astronomie, si la droite OZ est la verticale d'un lieu, le plan ZOX le plan méridien du lieu, et que le rayon OM soit le rayon visuel d'un astre, l'angle θ sera la *distance zénithale* de cet astre et l'angle ψ son *azimut*. En géographie, on prend pour OZ la ligne des pôles, alors θ est le complément de la *latitude* et ψ la *longitude*.

DISTANCE DE DEUX POINTS.

413—Nous avons déjà trouvé la distance de l'origine à un point en coordonnées rectangulaires ou obliques. Soient (x', y', z'), (x'', y'', z'') les coordonnées de deux points M′ et M″, l la distance M′ M″ de ces deux points. Transportons les axes, parallèlement à eux-mêmes, en M′. Si les axes sont rectangulaires, on a (n° 400):

$$l = \sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}.$$

Si les axes sont obliques, on a (n° 402)

$$l = \sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2+2(y''-y')(z''-z')\cos\lambda + 2(z''-z')(x''-x')\cos\mu + 2(x''-x')(y''-y')\cos\nu}.$$

CHAPITRE III.

Du Plan et de la Ligne droite.

DU PLAN.

CONSTRUCTION DE L'ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ.

414—L'équation générale du premier degré entre les variables x, y, z est

$$(1)\quad Ax+By+Cz+D=0;$$

elle renferme trois paramètres arbitraires qui sont les rapports de trois des quantités A, B, C, D à la quatrième. D'abord, si deux des coefficients A, B, C sont nuls, elle se réduit à la forme

$$Cz+D=0 \text{ ou } z=-\frac{D}{C};$$

elle représente un plan parallèle au plan XOY, lequel coupe l'axe des z à une distance $-\frac{D}{C}$ de l'origine. Si un seul des mêmes coefficients est nul, on a l'équation

$$Ax+By+D=0,$$

qui représente, dans le plan XOY une droite, et dans l'espace un plan parallèle à OZ mené par cette droite.

Supposons enfin qu'aucun des coefficients A, B, C ne soit nul. On obtient les traces de la surface sur les trois plans coordonnés XOY, XOZ, YOZ, en faisant dans l'équation proposée $z=0$, ou $y=0$, ou $x=0$, ce qui donne trois droites PQ, PR, QR, ayant pour équations

$$Ax+By+D=0,$$
$$Ax+Cz+D=0,$$
$$By+Cz+D=0.$$

Coupons la surface par un plan $z=c$, parallèle à XOY; la projection de l'intersection sur le plan XOY a pour équation

$$Ax+By+Cc+D=0;$$

c'est une droite G'H' parallèle à PQ. L'intersection elle-même étant la ligne suivant laquelle le plan $z=c$, parallèle à XOY,

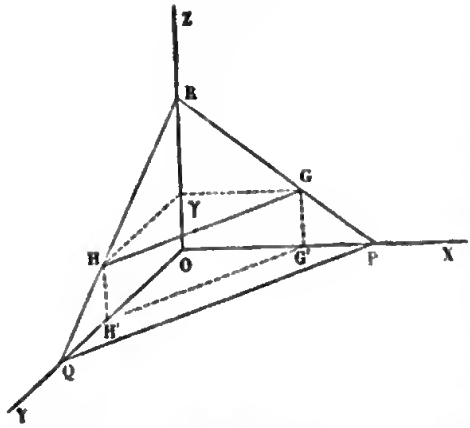


Fig. 234.

rencontre le plan projetant mené par G'H', est une droite GH, parallèle à G'H', et par conséquent parallèle à PQ. D'ailleurs la droite GH rencontre la droite PR au point G. On peut donc regarder la surface comme décrite par une droite GH, qui se meut parallèlement à la droite PQ, en s'appuyant constamment sur une autre droite PR ; donc la surface est un plan.

ÉQUATION DU PLAN.

415—Réciproquement, tout plan est représenté par une équation du premier degré entre les variables x, y, z. Car lorsque le plan est parallèle à l'un des plans coordonnés, XOY par exemple, si l'on appelle c la coordonnée z du point où il rencontre l'axe OZ, son équation est $z=c$. En second lieu, si le plan est seulement parallèle à l'un des axes, OZ par exemple, sa trace sur le plan XOY a une équation de la forme $Ax+By+D=0$; celle-ci représente, dans l'espace, le plan donné.

Enfin, supposons que le plan ne soit parallèle à aucun des axes; soient

$$z=ax+\gamma,\ z=by+\gamma$$

les équations de ses traces PR et QR sur les plans XOZ et YOZ. On peut disposer des coefficients de l'équation

$$(1)\quad Ax+By+Cz+D=0,$$

de manière que le plan qu'elle représente coïncide avec le plan proposé. En effet, les traces du plan représenté par l'équation (1) sur les plans XOZ et YOZ ont pour équations

$$Ax+Cz+D=0,\ By+Cz+D=0,$$

ou

$$z=-\frac{A}{C}x-\frac{D}{C},\quad z=-\frac{B}{C}y-\frac{D}{C};$$

elles coïncideront avec les traces PR, QR du plan proposé, si l'on a

$$\frac{A}{C}=-a,\quad \frac{B}{C}=-b,\quad \frac{D}{C}=-\gamma,$$

ou

$$A=-Ca,\ B=-Cb,\ D=-C\gamma.$$

L'équation (1), dans laquelle on substitue les valeurs précédentes, devient, après la suppression du facteur C,

$$z-ax-by-\gamma=0.$$

CONDITIONS POUR QUE DEUX PLANS SOIENT PARALLÈLES.

416—Soient

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0$$

les équations de deux plans. Pour que ces plans soient parallèles, il est nécessaire et il suffit que leurs traces sur deux des plans coordonnés soient respectivement parallèles. Les traces sur le plan XOZ ont pour équations

$$Ax+Cz+D=0,$$
$$A'x+C'z+D'=0;$$

ces deux droites seront parallèles, si elles ont le même coefficient angulaire, ce qui donne la condition $-\frac{C}{A}=-\frac{C'}{A'}$, ou $\frac{A}{A'}=\frac{C}{C'}$. De même les traces sur le plan YOZ ont pour équations

$$By+Cz+D=0,$$
$$B'y+C'z+D'=0;$$

elles seront parallèles, si l'on a $\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$.

Ainsi, pour que les deux plans soient parallèles, il faut que l'on ait

$$(2)\quad \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'},$$

c'est-à-dire que les coefficients de x, y, z soient proportionnels.

ÉQUATION GÉNÉRALE DES PLANS QUI PASSENT PAR UN POINT DONNÉ.

417—L'équation générale du premier degré renfermant trois paramètres arbitraires, savoir les rapports de trois des coefficients au quatrième, il faut trois conditions pour déterminer un plan.

Cherchons d'abord l'équation générale des plans qui passent par un point donné M′ ayant pour coordonnées x', y', z'. Soit

$$(1)\quad Ax+By+Cz+D=0$$

l'équation d'un plan quelconque. Pour que ce plan passe par le point M′, il faut que les coordonnées de ce point vérifient l'équation du plan, ce qui donne l'équation de condition

$$(3)\quad Ax'+By'+Cz'+D=0,$$

qui déterminera l'un des coefficients, par exemple le coefficient D. Nous éliminerons ce coefficient en retranchant les deux équations (1) et (3) membre à membre; l'équation

$$(4)\quad A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0,$$

qui renferme deux paramètres arbitraires, les rapports de deux des trois coefficients A, B, C au troisième, est l'équation générale des plans passant par le point M′.

Si l'on voulait mener par un point un plan parallèle à un plan donné, l'équation du plan demandé étant de la forme (4), il suffirait de prendre les coefficients A, B, C proportionnels et plus simplement égaux aux coefficients de x, y, z dans l'équation du plan donné.

PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS DONNÉS.

418—Pour qu'un plan

$$Ax+By+Cz+D=0$$

passe par trois points donnés (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''), il faut que les trois équations de condition

$$Ax'+By'+Cz'+D=0,$$
$$Ax''+By''+Cz''+D=0,$$
$$Ax'''+By'''+Cz'''+D=0$$

soient vérifiées. De ces équations du premier degré, on déduira

les rapports $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$ de trois coefficients au quatrième.

Lorsque les trois points donnés sont situés sur les axes des coordonnées, l'équation du plan prend une forme très-simple. Appelons a, b, c les coordonnées des points P, Q, R, où le plan coupe les axes. On obtient le point P en faisant, dans l'équation du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$y=0$ et $z=0$, ce qui donne $a = -\frac{D}{A}$; on a de même le point Q en faisant $z=0$ et $x=0$, d'où $b = -\frac{D}{B}$; et le point R en faisant $x=0$ et $y=0$, d'où $c = -\frac{D}{C}$. Si l'on remplace les rapports $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$ par leurs valeurs $-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, -\frac{1}{c}$ tirées des relations précédentes, l'équation du plan se met sous la forme

$$(5) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

INTERSECTION DE TROIS PLANS.

419—La recherche du point d'intersection de trois plans revient à la résolution de trois équations du premier degré

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$
$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0,$$

à trois inconnus x, y, z. Si les trois plans se coupent en un point, les trois équations admettent une solution finie et une seule. Si les trois plans n'ont pas de point commun, ce qui arrive quand les plans se coupent deux à deux suivant des droites parallèles entre elles, ou quand deux des plans sont parallèles, les trois équations n'ont pas de solution. Si les trois plans passent par une même droite, ou se confondent, il y a une infinité de solutions. Dans le premier cas, on peut prendre à volonté l'une des variables; dans le second cas, deux des variables.

ANGLES DE LA NORMALE AU PLAN AVEC LES AXES.

420—Jusqu'à présent nous n'avons fait aucune hypothèse sur les coordonnées; dans ce qui suit, nous supposerons les coordonnées rectangulaires. Soit

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation d'un plan; les coordonnées a, b, c des points P, Q, R, où ce plan coupe les axes, sont données par les formules

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}.$$

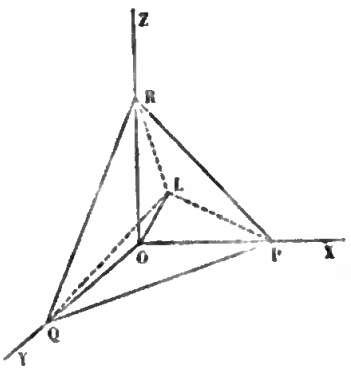


Fig. 235.

De l'origine O abaissons une perpendiculaire OL sur le plan (fig. 235), et joignons le pied L de la perpendiculaire aux points P, Q, R, de manière à former trois triangles rectangles OLP, OLQ, OLR. La distance OL, que nous désignerons par l, est la projection sur la droite OL des droites OP, OQ, OR; on a donc

$$l = a\cos\alpha = b\cos\beta = c\cos\gamma;$$

et, en remplaçant a, b, c par leurs valeurs,

$$(6) \quad -\frac{l}{D} = \frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C}.$$

Chacun de ces rapports est égal au nouveau rapport

$$\pm\frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

en vertu de la relation $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. On en déduit

$$(7) \quad \frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ces formules déterminent les angles que fait la normale au plan avec les axes des coordonnées, et par conséquent les angles que fait le plan avec les plans des coordonnées. Le double signe se rapporte aux deux directions opposées de la normale.

ANGLE DE DEUX PLANS.

421—Soient

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A'x+B'y+C'z+D'=0$$

les équations des deux plans. L'angle cherché est égal à l'angle des normales menées de l'origine aux deux plans donnés. Désignons par α, β, γ les angles que fait avec les axes la première normale, par α', β', γ' les angles de la seconde normale, et par V l'angle cherché. Les axes étant supposés rectangulaires, on a (nº 401)

$$\cos V=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma';$$

d'où, en vertu des formules (7),

$$(8)\quad \cos V=\pm\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Pour que les deux plans soient perpendiculaires entre eux, il est nécessaire et il suffit que l'on ait

$$(9)\quad AA'+BB'+CC'=0.$$

DISTANCE D'UN POINT A UN PLAN.

422—Quand nous avons cherché les angles que la normale OL au plan

$$Ax+By+Cz+D=0$$

fait avec les axes (nº 420), nous avons désigné par l la longueur de cette normale, et nous avons trouvé les rapports égaux

$$-\frac{l}{D}=\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\cos\beta}{B}=\frac{\cos\gamma}{C}=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Il en résulte

$$(10)\quad l=\frac{D}{\mp\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Cette formule donne la distance de l'origine au plan en coordonnées rectangulaires.

Il est facile d'en déduire la distance d'un point quelconque M ayant pour coordonnées x_1, y_1, z_1. Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point M, l'équation du plan devient

$$Ax'+By'+Cy'+(Ax_1+By_1+Cz_1+D)=0.$$

En vertu de la formule (10), la distance du point M au plan aura pour expression

$$(11)\quad l=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\mp\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

DE LA LIGNE DROITE.

PROJECTIONS D'UNE DROITE.

423—La manière la plus simple de définir une droite dans l'espace est de la considérer comme l'intersection de deux plans. Une droite sera donc représentée par le système de deux équations du premier degré

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

Si l'on élimine y ou x entre les deux équations, on obtiendra deux équations de la forme

$$(1)\quad x=az+p,\ y=bz+q;$$

ce sont les équations des plans qui projettent la droite sur le plan XOZ ou sur le plan YOZ. On peut aussi considérer chacune de ces équations comme étant celle de la projection elle-même dans son plan.

Si dans les équations (1), on fait $z=0$, on obtient les coordonnées $x=p$, $y=q$ de la trace de la droite sur le plan XOY.

Quand deux droites sont parallèles, leurs projections étant respectivement parallèles, les coefficients angulaires a et b sont les mêmes dans les équations de ces droites.

Les équations générales d'une droite renferment quatre paramètres arbitraires a, b, p, q.

ÉQUATION GÉNÉRALE DES DROITES QUI PASSENT PAR UN POINT DONNÉ.

424—Pour qu'une droite

$$(1)\quad x=az+p,\ y=bz+q$$

passe par un point donné M, ayant pour coordonnées x', y', z', il faut que les coordonnées de ce point vérifient les deux équa-

tions de la droite, ce qui donne les deux équations de condition

$$x' = az' + p, \quad y' = bz' + q,$$

servant à déterminer deux des paramètres, par exemple p et q. Si l'on retranche ces équations des équations (1), on obtient les équations

$$(2) \quad x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z'),$$

dans lesquelles les deux paramètres a et b sont arbitraires, et qui représentent toutes les droites passant par le point donné.

DROITE PASSANT PAR DEUX POINTS DONNÉS.

425—Les équations (2) représentent une droite quelconque passant par le point M; cette droite passera par un second point M′ ayant pour coordonnées x'', y'', z'', si les conditions

$$x'' - x' = a(z'' - z'), \quad y'' - y' = b(z'' - z')$$

sont vérifiées ; on en déduit

$$a = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}, \quad b = \frac{y'' - y'}{z'' - z'},$$

et la droite cherchée a pour équations

$$(3) \quad x - x' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}(z - z'),$$

ou plus simplement

$$(4) \quad \frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{z - z'}{z'' - z'}.$$

On obtient immédiatement les équations (2) et (3), en remarquant que, lorsqu'une droite passe par un point, les projections de la droite passent par les projections du point.

INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN.

426—Les coordonnées du point de rencontre d'une droite et d'un plan s'obtiennent, comme celles du point de rencontre de trois plans, par la résolution de trois équations du premier degré à trois inconnues. Si les équations de la droite sont

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$

et celle du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

en éliminant x et y, on obtient de suite la coordonnée z du point d'intersection

$$z = -\frac{Ap+Bq+D}{Aa+Bb+C}.$$

Si l'on a

$$(5) \quad Aa + Bb + C = 0,$$

la valeur de z devenant infinie, le point de rencontre s'éloigne à l'infini et la droite est parallèle au plan.

Si l'on a en même temps

$$(6) \quad \begin{cases} Aa+Bb+C=0, \\ Ap+Bq+D=0, \end{cases}$$

la valeur de z est indéterminée, la droite a une infinité de points communs avec le plan, c'est-à-dire qu'elle est située dans le plan. La première des conditions (6) exprime que la droite est parallèle au plan ; la seconde que la trace de la droite sur le plan des xy, trace qui a pour coordonnées (p, q, o), est située dans le plan.

CONDITION POUR QUE DEUX DROITES SE RENCONTRENT.

427—Deux droites placées dans l'espace ne se rencontrent pas en général ; pour qu'elles se rencontrent, il faut que leurs équations

$$\begin{cases} x = az+p, \\ y = bz+q, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a'z+p', \\ y = b'z+q', \end{cases}$$

soient satisfaites par un même système de valeurs de x, y, z. Ceci n'aura lieu que si la condition

$$(7) \quad (a-a')(q-q') - (b-b')(p-p') = 0,$$

obtenue par l'élimination de x, y, z, est remplie.

ÉQUATION GÉNÉRALE DES PLANS QUI PASSENT PAR LA DROITE D'INTERSECTION DE DEUX PLANS DONNÉS.

428—Soient $A=0$, $B=0$ les équations de deux plans. L'équation

$$(8) \quad A + \lambda B = 0,$$

dans laquelle le paramètre λ est arbitraire, représentera tous les plans qui passent par la droite d'intersection des deux pre-

miers plans. Il est évident d'abord que, quelle que soit la valeur attribuée au paramètre λ, le plan représenté par l'équation (8) passera par la droite d'intersection des plans $A=0$, $B=0$; car cette équation est vérifiée par les coordonnées de chacun des points communs aux deux plans. On voit ensuite que l'équation (8) représente tous les plans qui passent par la droite d'intersection des deux plans donnés; car l'un quelconque de ces plans est défini par la droite d'intersection, et un point (x', y', z') pris arbitrairement dans l'espace; or, on peut déterminer le paramètre λ, de manière que le plan (8) passe par ce point.

MENER UN PLAN PAR UN POINT ET UNE DROITE DONNÉS.

429—Soient x', y', z' les coordonnées du point donné,

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A'z+B'y+C'z+D'=0, \end{cases}$$

les équations de la droite. Le plan cherché passant par la droite aura une équation de la forme

$$Ax+By+Cz+D+\lambda(A'x+B'y+C'z+D')=0;$$

on déterminera le paramètre λ de manière que le plan passe par le point donné, ce qui donne l'équation de condition

$$Ax'+By'+Cz'+D+\lambda(A'x'+B'y'+C'z'+D')=0,$$

d'où l'on déduit la valeur de λ. Le plan cherché a pour équation

$$(9)\quad \frac{Ax+By+Cz+D}{Ax'+By'+Cz'+D}=\frac{A'x+B'y+C'z+D'}{A'x'+B'y'+C'z'+D'}.$$

PAR UNE DROITE DONNÉE MENER UN PLAN PERPENDICULAIRE A UN PLAN DONNÉ.

430—Soient

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A'x+B'y+C'z+D'=0, \end{cases}$$

les équations de la droite donnée,

$$A''x+B''y+C''z+D''=0$$

celle du plan donné. Le plan cherché, passant par la droite, a une équation de la forme

$$Ax+By+Cz+D+\lambda(A'x+B'y+C'z+D')=0.$$

Ce plan sera perpendiculaire au plan donné, si la condition

$$A''(A+\lambda A')+B''(B+\lambda B')+C''(C+\lambda C')=0$$

est vérifiée (nº 421), les axes étant supposés rectangulaires; on en déduit

$$\lambda=-\frac{A''A+B''B+C''C}{A'A''+B'B''+C'C''},$$

et le plan cherché a pour équation

$$(10)\quad (A'A''+B'B''+C'C'')(Ax+By+Cz+D)=(A''A+B''B+C''C)(A'x+B'y+C'z+D').$$

Les trois plans donnés forment un trièdre; par l'une des arêtes nous avons mené un plan perpendiculaire à la face opposée. Les plans menés par chacune des autres arêtes perpendiculairement à la face opposée ont de même pour équations

$$(A''A+B''B+C''C)(A'x+B'y+C'z+D')=(AA'+BB'+CC')(A''x+B''y+C''z+D''),$$

$$(AA'+BB'+CC')(A''x+B''y+C''z+D'')=(A'A''+B'B''+C'C'')(Ax+By+Cz+D).$$

En ajoutant les deux premières équations membre à membre, on trouve la troisième; on en conclut que les trois plans passent par une même droite.

ANGLES D'UNE DROITE AVEC LES AXES.

431—Dans les questions que nous avons traitées jusqu'à présent sur la ligne droite, excepté dans la question précédente, nous n'avons fait aucune hypothèse sur les coordonnées; dans ce qui suit, nous supposerons les coordonnées rectangulaires.

Soient

$$x=az+p,\quad y=bz+q$$

les équations d'une droite. La parallèle OL menée par l'origine (fig. 236) aura pour équations

$$x=az,\quad y=bz.$$

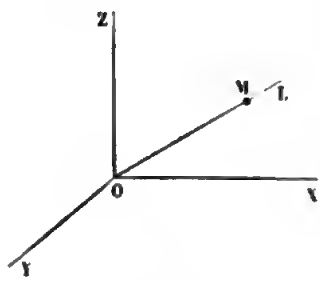


Fig. 236.

Désignons par α, β, γ les angles que fait la droite OL avec les axes. Prenons sur cette droite un point M, situé à une distance l de l'origine. Les coordonnées x, y, z du point M étant les projections orthogonales de la droite OM sur les axes, on a

$$x=l\cos\alpha,\quad y=l\cos\beta,\quad z=l\cos\gamma,$$

et par suite

$$\frac{\cos\alpha}{x}=\frac{\cos\beta}{y}=\frac{\cos\gamma}{z}.$$

Le point M étant sur la droite OL, on a $x=az$, $y=bz$; on en déduit

$$\frac{\cos\alpha}{az}=\frac{\cos\beta}{bz}=\frac{\cos\gamma}{z},$$

ou, en multipliant par z ces rapports égaux,

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{1}.$$

Chacun de ces rapports étant égal au rapport

$$\pm\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

on a les formules

$$(11)\quad \frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c}=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

qui déterminent les angles que fait la droite donnée avec les axes. Le double signe se rapporte aux deux directions de la droite.

PAR UN POINT MENER UNE DROITE QUI FASSE AVEC LES AXES DES ANGLES DONNÉS.

432—Proposons-nous de mener par le point M′, dont les coordonnées sont x', y', z', une droite qui fasse avec les axes des coordonnées rectangulaires les angles α, β, γ. La droite cherchée est représentée par des équations de la forme

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{1}.$$

Mais on a

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{1};$$

si l'on divise ces rapports égaux deux à deux, il vient

$$(12)\quad \frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma}.$$

On peut obtenir directement ces équations; si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de la

droite, et par ρ la distance M'M, les différences $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ sont les projections de la longueur M'M sur les axes des coordonnées. D'un autre côté, si la longueur M'M est comptée à partir du point M' dans la direction qui fait avec les axes les angles α, β, γ, ces projections sont égales à $\rho \cos\alpha$, $\rho \cos\beta$, $\rho \cos\gamma$; si la longueur M'M est comptée dans la direction opposée, ces projections sont égales à $-\rho \cos\alpha$, $-\rho \cos\beta$, $-\rho \cos\gamma$. On a donc, dans tous les cas,

$$x-x'=\rho \cos\alpha,\ y-y'=\rho \cos\beta,\ z-z'=\rho \cos\gamma,$$

ou

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma}=\rho,$$

en convenant de regarder la longueur ρ comme positive ou négative, suivant qu'elle est parcourue dans la première direction ou dans la direction opposée.

ANGLE DE DEUX DROITES.

433—Soient

$$\begin{cases} x=az+p, \\ y=bz+q, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a'z+p', \\ y=b'z+q', \end{cases}$$

les équations de deux droites. On déterminera les angles (α, β, γ), $(\alpha', \beta, \gamma')$ de chacune d'elles avec les axes, puis on exprimera l'angle V qu'elles font entre elles par la formule connue (nº 401). On a

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{1}=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

$$\frac{\cos\alpha}{a'}=\frac{\cos\beta}{b'}=\frac{\cos\gamma}{1}=\pm\frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}},$$

d'où

$$(13)\quad \cos V=\pm\frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\ \sqrt{a'^2+b'^2+1}}.$$

Les droites sont perpendiculaires entre elles lorsque la relation

$$(14)\quad aa'+bb'+1=0$$

est satisfaite.

ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN.

434—Soient

$$x=az+p,\quad y=bz+q$$

les équations de la droite,

$$Ax+By+Cz+D=0$$

celle du plan. L'angle V de la droite et du plan est complémentaire de l'angle que forme la droite avec la normale au plan.

Si l'on appelle α, β, γ les angles que fait la droite avec les axes, α', β', γ' les angles que fait la normale au plan, on a

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{1}=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

$$\frac{\cos\alpha'}{A}=\frac{\cos\beta'}{B}=\frac{\cos\gamma'}{C}=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

et par suite

$$(15)\quad \sin V=\frac{Aa+b+C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(a^2+b^2+1)}}.$$

CONDITIONS POUR QU'UNE DROITE ET UN PLAN SOIENT PERPENDICULAIRES.

435—Soient, comme précédemment,

$$x=az+p,\quad y=bz+q$$

les équations de la droite,

$$Ax+By+Cz+D=0$$

celle du plan. En désignant par α, β, γ les angles de la droite avec les axes, par α', β', γ' ceux de la perpendiculaire au plan avec les mêmes axes, nous avons

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{1},$$

$$\frac{\cos\alpha'}{A}=\frac{\cos\beta'}{B}=\frac{\cos\gamma'}{C}.$$

Si la droite est perpendiculaire au plan, les angles α, β, γ étant respectivement égaux à α', β', γ', on a, en divisant les rapports précédents deux à deux,

$$(16)\quad \frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{1}.$$

Réciproquement, lorsque les conditions (16) sont remplies, la droite est perpendiculaire au plan. On en déduit, en effet, $A=aC$, $B=bC$, et par suite

$$\frac{\cos\alpha'}{aC}=\frac{\cos\beta'}{bC}=\frac{\cos\gamma'}{C},$$

ou, en multipliant par C ces rapports égaux,

$$\frac{\cos\alpha'}{a}=\frac{\cos\beta'}{b}=\frac{\cos\gamma'}{1}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{1}.$$

Si l'on divise ces rapports égaux deux à deux, il vient

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}=\frac{\cos\beta}{\cos\beta'}=\frac{\cos\gamma}{\cos\gamma'}=\pm\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}}{\sqrt{\cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma'}}=\pm 1;$$

les angles α et α', β et β', γ et γ' étant respectivement égaux ou supplémentaires, on en conclut que la droite est perpendiculaire au plan.

Des relations (16) on déduit aisément ce théorème dont on se sert en géométrie descriptive : lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, la projection de la droite sur un plan quelconque est perpendiculaire à la trace du plan. La projection de la droite sur le plan XOZ a pour équation $x=az+p$, l'équation de la trace du plan est $Ax+Cz+D=0$, la relation $a=\frac{A}{C}$ exprime que les deux droites sont rectangulaires. De même, la relation $b=\frac{B}{C}$ exprime que la projection de la droite sur le plan YOZ est perpendiculaire à la trace du plan.

PAR UN POINT DONNÉ MENER UNE DROITE PERPENDICULAIRE A UN PLAN DONNÉ.

436.—Soient x', y', z' les coordonnées du point donné M,

$$Ax+By+Cz+D=0$$

l'équation du plan. Les équations de la droite cherchée seront de la forme

$$x-x'=a(z-z'),\quad y-y'=b(z-z').$$

Cette droite sera perpendiculaire au plan donné, si les relations

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{1}$$

sont vérifiées ; on en déduit

$$a=\frac{A}{C},\quad b=\frac{B}{C};$$

et, par suite, la droite cherchée a pour équations

$$x-x'=\frac{A}{C}(z-z'),\quad y-y'=\frac{B}{C}(z-z),$$

ou, plus simplement,

$$(17)\quad \frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}.$$

On obtient immédiatement ces équations, en remarquant que les numérateurs sont proportionnels aux cosinus des angles que la droite fait avec les axes, tandis que les dénominateurs sont proportionnels aux cosinus des angles que la normale au plan fait avec les axes; la droite coïncidant avec la normale, ces deux séries de quantités sont proportionnelles.

437—Les coordonnées du pied de la perpendiculaire, c'est-à-dire du point P où la perpendiculaire perce le plan, seront données par les deux équations (17) jointes à l'équation du plan. On peut mettre l'équation du plan sous la forme

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=-(Ax'+By'+Cz'+D);$$

en ajoutant les numérateurs et les dénominateurs des rapports égaux (17), après avoir multiplié les deux termes du premier par A, ceux du second par B, ceux du troisième par C, on forme un nouveau rapport égal à chacun des précédents

$$\frac{A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')}{A^2+B^2+C^2}=\frac{-(Ax'+By'+Cz'+D)}{A^2+B^2+C^2};$$

on a ainsi les équations

$$(18)\quad \frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}=\frac{-(Ax'+By'+Cz'+D)}{A^2+B^2+C^2},$$

qui déterminent le pied de la perpendiculaire.

On obtiendra la longueur de la perpendiculaire en rempla-

çant les différences $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ par leurs valeurs dans la formule

$$l=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

ce qui donne

$$l=\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

On retrouve ainsi la formule à laquelle nous avons déjà été conduits par une autre méthode (nº 422).

PAR UN POINT DONNÉ MENER UN PLAN PERPENDICULAIRE A UNE DROITE DONNÉE.

438—Soient x', y', z' les coordonnées du point donné M,

$$x=az+p,\quad y=bz+q$$

les équations de la droite. Le plan cherché, passant par le point M, a une équation de la forme

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

Ce plan sera perpendiculaire à la droite, si les relations

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{1}$$

sont vérifiées. En remplaçant les rapports $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$ par leurs valeurs a et b, l'équation du plan cherché devient

$$(19)\quad a(x-x')+b(y-y')+(z-z')=0.$$

On obtient encore immédiatement cette équation, en remarquant que les quantités a, b, 1 sont proportionnelles aux cosinus des angles que fait la droite donnée avec les axes, tandis que les quantités $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ sont proportionnelles aux cosinus des angles que fait avec ces mêmes axes la droite qui va du point M à un point quelconque du plan; ces deux directions étant rectangulaires, la somme des produits de ces quantités deux à deux doit être égale à zéro.

439—On aura le point P où le plan coupe la droite, en joignant l'équation du plan aux deux équations de la droite; celles-ci étant mises sous la forme

$$x-x'=a(z-z')-(x'-az'-p),$$
$$y-y'=b(z-z')-(y'-bz'-q),$$

on en déduit, en remplaçant $x-x'$ et $y-y'$ dans l'équation du plan,

$$z-z'=\frac{a(x'-az'-p)+b(y'-bz'-q)}{a^2+b^2+1}.$$

A l'aide de ces formules, on calculerait aisément la distance MP du point à la droite donnée. Mais nous l'obtiendrions plus rapidement par une autre méthode.

PAR UN POINT DONNÉ MENER UNE DROITE PERPENDICULAIRE A UNE DROITE DONNÉE.

440—Soient x', y', z' les coordonnées du point donné,

$$x=az+p,\ y=bz+q$$

les équations de la droite donnée. La droite cherchée est l'intersection de deux plans, l'un mené par le point et la droite donnés, l'autre mené par le point donné perpendiculairement à la droite donnée. Le premier a pour équation (n° 429)

$$\frac{x-az-p}{x'-az'-p}=\frac{y-bz-q}{y'-bz'-q},$$

le second (n° 438)

$$a(x-x')+b(y-y')+(z-z')=0;$$

les deux équations simultanées représentent la droite cherchée.

DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE DONNÉE.

441—Appelons toujours x', y', z' les coordonnées du point donné M. Supposons d'abord que la droite donnée OL passe par l'origine, et désignons par α, β, γ les angles qu'elle fait avec les axes des coordonnées rectangulaires. La perpendiculaire MP, abaissée du point M sur la droite OL, étant un côté d'un triangle rectangle OMP (fig. 237), on a

$$l^2=\overline{MP}^2=\overline{OM}^2-\overline{OP}^2.$$

La distance OM est connue; elle est donnée par la formule

$$\overline{OM}^2=x'^2+y'^2+z'^2.$$

Quant à la distance OP, c'est la projection de la droite OM sur

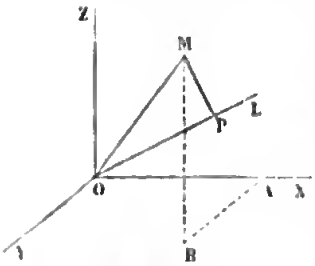


Fig. 237.

la droite OL; en écrivant que la projection de la droite OM est égale à celle de la ligne brisée OABM, dont les côtés sont les coordonnées x', y', z' du point M, on a

$$OP = x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma.$$

Il vient de la sorte

$$(20) \quad l^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma)^2.$$

On peut mettre cette formule sous une autre forme. Si l'on multiplie la quantité $x'^2 + y'^2 + z'^2$ par $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$, c'est-à-dire par l'unité, on a

$$l^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma)^2,$$

en effectuant les calculs et groupant convenablement les termes, il vient

$$(21) \quad l^2 = (y'\cos\gamma - z'\cos\beta)^2 + (z'\cos\alpha - x'\cos\gamma)^2 + (x'\cos\beta - y'\cos\alpha)^2.$$

Supposons maintenant que la droite donnée ne passe pas par l'origine, et soient

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

les équations de cette droite. Imaginons que l'on transporte les axes, parallèlement à eux-mêmes, en un point de la droite, par exemple au point (p, q, o) où elle perce le plan XOY; les coordonnées du point M relativement à ces nouveaux axes étant $x' - p$, $y' - q$, z', on aura, en appliquant la formule (21),

$$l^2 = [(y'-q)\cos\gamma - z'\cos\beta]^2 + [(x'-p)\cos\gamma - z'\cos\alpha]^2 + [(x'-p)\cos\beta - (y'-q)\cos\alpha]^2;$$

si l'on remplace enfin $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par leurs valeurs, on obtient la formule

$$(22) \quad l^2 = \frac{(x' - az' - p)^2 + (y' - bz' - q)^2 + [b(x'-p) - a(y'-q)]^2}{a^2 + b^2 + 1}.$$

PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES.

442—Soient

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

les équations de la première droite AB,

$$x = a'z + p', \quad y = b'z + q'$$

celles de la seconde droite CD (fig. 238). On sait que la perpen-

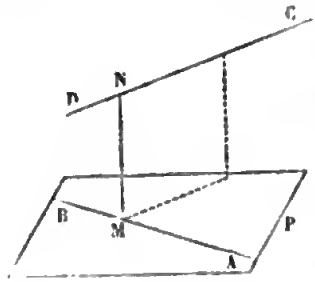


Fig. 238.

diculaire commune MN à ces deux droites mesure leur plus courte distance. On sait aussi que la longueur l de cette perpendiculaire commune MN est égale à la distance d'un point quelconque de la droite CD au plan P mené par la droite AB parallèlement à CD. Cherchons d'abord l'équation du plan P; tout plan mené par la droite AB a une équation de la forme

$$(x-az-p)+\lambda(y-bz-q)=0;$$

ce plan sera parallèle à CD, si la condition (nº 426)

$$(a'+\lambda b')-(a+\lambda b)=0$$

est remplie; on en déduit

$$\lambda=-\frac{a-a'}{b-b'}.$$

et par suite le plan P a pour équation

$$(23)\quad (b-b')(x-az-p)-(a-a')(y-bz-q)=0.$$

La distance à ce plan d'un point quelconque de la droite CD, par exemple du point (p', q', o), où elle perce le plan XOY, a pour expression (nº 422)

$$(24)\quad l=\frac{(b-b')(p-p')-(a-a')(q-q')}{\pm\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2}}.$$

Telle est la plus courte distance des deux droites données.

443—Si l'on demandait les équations de la perpendiculaire commune MN, il faudrait, par chacune des droites données AB, CD, mener un plan perpendiculaire au plan P; ces deux plans, par leur intersection, détermineraient la droite MN. Un plan

$$(x-az-p)+\lambda(y-bz-q)=0,$$

mené par la droite AB, sera perpendiculaire au plan P représenté par l'équation (23), si la condition (nº 421)

$$(b-b')-\lambda(a-a')-(a+\lambda b)(ab'-ba')=0$$

est vérifiée; on en déduit la valeur de λ, et le plan cherché a pour équation

$$(25)\quad (a-a')(x-az-p)+(b-b')(y-bz-q)$$
$$+(ab'-ba')\,[b(x-p)-a(y-q)]=0.$$

Le plan mené par la droite CD, perpendiculairement au plan P, a de même pour équation

$$(26)\quad (a'-a)(x-a'z-p')+(b'-b)(y-b'z-q')$$
$$+(a'b-b'a)\,[b'(x-p')-a'(y-q')]=0.$$

Les deux équations simultanées (25) et (26) représentent la perpendiculaire commune MN.

SPHÈRE.

444—La surface de la sphère, étant le lieu des points distants du centre d'une quantité constante égale au rayon, a pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Si, à l'équation d'une sphère, on joint celle d'un plan, on aura les équations de la ligne d'intersection, c'est-à-dire d'un cercle dans l'espace.

EXERCICES.

1° Étant donné un système de trois axes rectangulaires et un point sur chacun des axes; trouver en fonction des coordonnées des trois points, 1° les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle qui aurait pour sommets les trois points, 2° les coordonnées du centre du cercle inscrit dans le même triangle.

2° Une ellipse et une hyperbole sont disposées dans deu plans rectangulaires, de façon que les sommets de l'une des courbes sont les foyers de l'autre; démontrer, 1° que, si l'on joint un point quelconque de l'ellipse à deux points fixes de l'hyperbole, la somme des rayons vecteurs est constante lorsqu'il y a un des points fixes sur chacune des branches de l'hyperbole, et que la différence des rayons est constante lorsque les deux points fixes appartiennent à la même branche de l'hyperbole; 2° que, si l'on joint un point quelconque d'une branche de l'hyperbole à deux points fixes de l'ellipse, la différence des rayons vecteurs est constante.

3° Démontrer que, si par chacune des arêtes d'un angle trièdre et la bissectrice de la face opposée, on fait passer un plan, les trois plans ainsi obtenus se coupent suivant une même droite.

4° Étant donné un trièdre et une droite passant par son sommet, par la droite fixe et chacune des arêtes on fait passer un plan qui partage la face opposée en deux angles; démontrer que le produit des sinus de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres. (Réciproque.)

5° Étant donné un trièdre, par le sommet on mène un plan quelconque qui détermine sur chaque face deux segments; démontrer que le produit des sinus de trois segments non consécutifs est égal et de signe contraire au produit des trois autres. (Réciproque.)

6° Trouver l'aire d'un triangle en fonction des coordonnées des sommets, les axes étant rectangulaires.

7° Trouver le volume d'un tétraèdre ayant l'un de ses sommets à l'origine en fonction des coordonnées des trois autres sommets.

8° Démontrer que les trois droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un tétraèdre passent par un même point.

9° Trouver l'équation d'un plan mené par un point de l'axe des x, perpendiculairement à cet axe, les coordonnées étant obliques.

Application à la détermination du centre d'une sphère donnée par son équation en coordonnées obliques, au moyen de plans perpendiculaires aux axes.

10° Les six plans des cercles d'intersection de quatre sphères prises deux à deux se coupent en un même point.

CHAPITRE IV.

Génération des Surfaces.

445—Soient

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F_1(x, y, z, \alpha) = 0$$

les équations d'une ligne renfermant un paramètre arbitraire α; si l'on fait varier α d'une manière continue, la ligne se meut dans l'espace et engendre une surface. On obtiendra l'équation de cette surface en éliminant le paramètre α entre les deux équations de la ligne mobile (nº 98).

Supposons que les équations d'une ligne mobile

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad F_1(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

renferment deux paramètres variables α et β, assujettis à vérifier la relation

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0.$$

Un seul de ces paramètres sera arbitraire, et la ligne, dans son mouvement, engendrera encore une surface dont on obtiendra l'équation en éliminant les deux paramètres α et β entre les trois équations précédentes.

En général, si les deux équations d'une ligne mobile renferment n paramètres variables, assujettis à vérifier $n-1$ équations de condition, cette ligne engendrera une surface dont on obtiendra l'équation en éliminant les n paramètres variables entre les deux équations de la ligne et les $n-1$ équations de condition.

On donne le nom de *génératrice* à la ligne mobile qui engendre la surface. On définit ordinairement le mouvement de la génératrice en l'assujettissant à glisser sur certaines lignes fixes, que l'on nomme *directrices*. Soient

$$f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0$$

les équations d'une directrice; pour que la génératrice rencontre la directrice, il faut que les quatre équations de ces deux lignes soient vérifiées par un même système de valeurs de x, y, z; si donc, entre ces quatre équations, on élimine

x, y, z, on obtiendra une équation de condition entre les paramètres α, β,... que renferment les équations de la génératrice. Chaque directrice donnera ainsi une équation de condition entre les paramètres variables. Si donc les équations de la génératrice renferment n paramètres variables, il faudra assujettir cette ligne mobile à glisser sur $n-1$ directrices.

On appelle *surfaces réglées* les surfaces engendrées par le mouvement d'une ligne droite. Les équations générales d'une ligne droite renfermant quatre paramètres variables, il faut trois directrices pour définir le mouvement d'une ligne droite. Parmi les surfaces réglées, nous étudierons particulièrement les surfaces cylindriques, les surfaces coniques et les surfaces conoïdes.

SURFACES CYLINDRIQUES.

446—On appelle *surface cylindrique* une surface engendrée par une droite qui se meut en restant constamment parallèle à elle-même.

La génératrice sera représentée par les équations

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

dans lesquelles les paramètres a et b sont constants, et les deux paramètres α et β variables. On définira le mouvement de la génératrice, en l'assujettissant à glisser sur une directrice donnée, ce qui fournira une équation de condition

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

entre les deux paramètres variables α et β. On obtiendra l'équation de la surface, en éliminant les deux paramètres α et β entre les deux équations de la génératrice et l'équation de condition; remplaçant, dans cette dernière, α et β par leurs valeurs $x - az$, $y - bz$, tirées des deux premières, on aura l'équation de la surface cylindrique

$$(1) \quad \varphi(x - az, y - bz) = 0.$$

447—Plus généralement, la génératrice peut être représentée par les deux équations

$$ax + by + cz + d = \alpha,$$
$$a'x + b'y + c'z + d' = \beta,$$

dans lesquelles les deux paramètres α et β sont seuls variables; car, chacune de ces équations étant celle d'un plan qui se meut parallèlement à lui-même, la droite d'intersection conserve aussi la même direction. Les deux paramètres α et β sont liés par une équation de condition $\varphi(\alpha, \beta)=0$; l'élimination des deux paramètres α et β donne l'équation de la surface cylindrique

$$(2) \quad \varphi(ax+by+cz+d,\ a'x+b'y+c'z+d')=0.$$

Réciproquement, toute équation de la forme (2) ne peut représenter qu'une surface cylindrique. Si l'on pose, en effet,

$$ax+by+cz+d=\alpha,$$
$$a'x+b'y+c'z+d'=\beta;$$

l'équation proposée devient

$$\varphi(\alpha, \beta)=0;$$

à tout système de valeurs réelles de α et β, vérifiant cette équation, correspond une droite ayant une direction déterminée; l'ensemble de ces droites forme une surface cylindrique.

Ainsi, *l'équation générale des surfaces cylindriques est une équation quelconque entre deux polynômes du premier degré en* x, y, z.

Cependant, il peut arriver que l'équation $\varphi(\alpha, \beta)=0$ n'admette qu'un nombre fini de solutions réelles; dans ce cas, l'équation (2) ne représente qu'un nombre limité de droites.

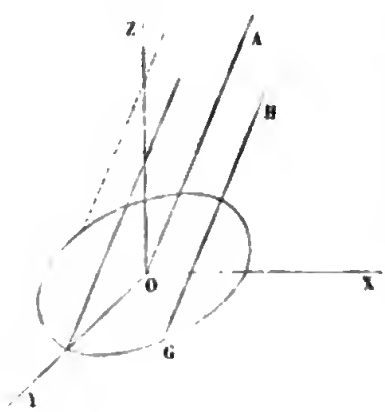


Fig. 239.

448—Supposons que la surface ait pour directrice une courbe plane, située dans le plan XOY (fig. 239), et soit $\varphi(x, y)=0$ l'équation de cette courbe dans son plan. La trace G de la génératrice GH

$$x=az+\alpha,\ y=bz+\beta$$

sur ce plan a pour coordonnées $x=\alpha$, $y=\beta$; cette trace

devant appartenir à la directrice, on aura l'équation de condition $\varphi(\alpha, \beta)=0$, et la surface cylindrique sera représentée par l'équation

$$\varphi(x-az,\ y-bz)=0.$$

On voit que, si la directrice plane est algébrique et de l'ordre m, la surface cylindrique est aussi algébrique et de l'ordre m.

SURFACES CONIQUES.

449—On appelle *surface conique* une surface engendrée par une droite qui tourne autour d'un point fixe.

Désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point fixe, c'est-à-dire du sommet du cône; les équations de la génératrice seront de la forme

$$\frac{x-x_0}{z-z_0}=\alpha,\quad \frac{y-y_0}{z-z_0}=\beta,$$

α et β étant deux paramètres variables. On définira le mouvement de la génératrice en l'assujettissant à glisser sur une directrice donnée, ce qui fournira une équation de condition $\varphi(\alpha, \beta)=0$ entre les deux paramètres variables α et β. En éliminant α et β entre cette équation et les deux équations de la génératrice, on obtiendra l'équation de la surface conique

$$(3)\quad \varphi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\ \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0.$$

C'est une équation homogène entre les trois différences $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$.

Réciproquement, toute équation homogène entre les trois différences $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ ne peut représenter qu'une surface conique; car on pourra mettre cette équation sous la forme (3); si l'on pose ensuite

$$\frac{x-x_0}{z-z_0}=\alpha,\quad \frac{y-y_0}{z-z_0}=\beta,$$

l'équation proposée devient

$$\varphi(\alpha, \beta)=0;$$

à tout système de valeurs réelles de α et β, satisfaisant à cette équation, correspond une droite passant par le point fixe

(x_0, y_0, z_0) ; l'ensemble de ces droites forme une surface conique.

Cependant, si l'équation $\varphi(\alpha, \beta)=0$ n'avait qu'un nombre limité de solutions réelles, on n'aurait qu'un nombre limité de droites. Dans le cas où cette équation n'a pas de solutions réelles, il peut arriver que l'équation (3) soit vérifiée par les valeurs x_0, y_0, z_0 ; alors elle représente un point unique.

Quand on place l'origine des coordonnées au sommet du cône, l'équation de la surface conique se réduit à la forme

$$(4) \quad \varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0,$$

C'est une équation homogène entre les trois coordonnées x, y, z.

450—Considérons le cas où la directrice est une courbe plane. Prenons le sommet du cône pour origine des coordonnées, et supposons le plan XOY parallèle au plan de la courbe. Soient $z=c$, $\varphi(x, y)=0$ les équations de la directrice, $x=\alpha z$, $y=\beta z$, celles de la génératrice ; la trace de la génératrice sur le plan de la directrice ayant pour coordonnées $z=c$, $x=\alpha c$, $y=\beta c$, pour que ce point G appartienne à la directrice il faut que l'équation de condition $\varphi(\alpha c, \beta c)=0$ soit vérifiée. En éliminant α et β entre cette équation et celles de la génératrice, on obtient l'équation de la surface conique

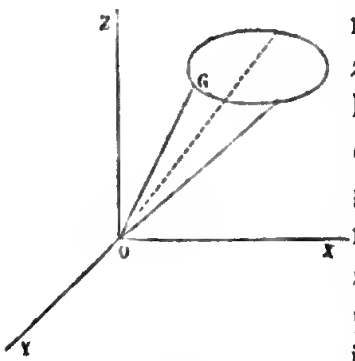


Fig. 240.

$$\varphi\left(c\frac{x}{z}, c\frac{y}{z}\right)=0.$$

On voit que, si la directrice plane est algébrique et de l'ordre m, la surface conique est aussi algébrique et de l'ordre m.

SURFACES CONOÏDES.

451—On appelle *surface conoïde* une surface engendrée

par une droite qui se meut en restant constamment parallèle à un même plan que l'on nomme plan *directeur*, et en glissant sur une droite fixe appelée *axe* du conoïde et sur une seconde directrice quelconque.

Prenons la directrice rectiligne pour axe des z, et supposons le plan XOY parallèle au plan directeur. La génératrice sera représentée par des équations de la forme

$$z=\alpha, \quad \frac{y}{x}=\beta.$$

La directrice donnera une équation de condition $\varphi(\alpha, \beta)=0$ entre les deux paramètres variables α et β. La surface conoïde aura pour équation

$$(5) \quad \varphi\left(z, \frac{y}{x}\right)=0.$$

452 — Supposons que l'axe OZ soit perpendiculaire au plan directeur (fig. 241), et que la directrice soit un cercle dont le plan soit aussi perpendiculaire au plan directeur. Faisons passer l'axe OX par le centre C du cercle ; ce cercle parallèle au plan

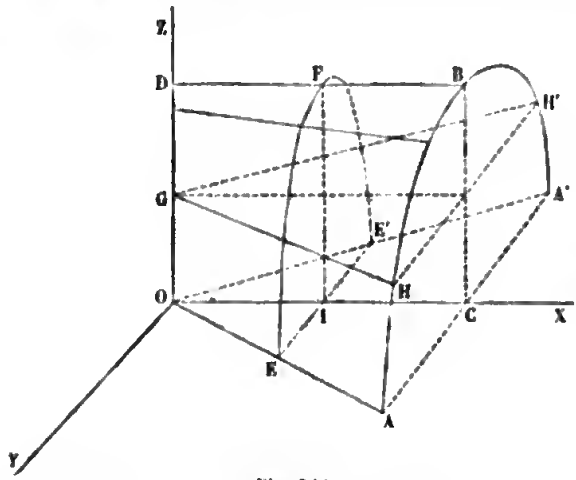


Fig. 241.

YOZ aura des équations de la forme

$$x=a, \quad y^2+z^2=r^2.$$

Pour que la génératrice GH s'appuie sur le cercle, il faut que les paramètres α et β satisfassent à la relation

$$a^2\beta^2+\alpha^2=r^2.$$

Le conoïde est donc représenté par l'équation du quatrième degré

$$x^2z^2+a^2y^2-r^2x^2=0.$$

Si l'on coupe la surface par un plan parallèle au plan direc-

teur, on obtient évidemment deux génératrices GH, GH′; l'angle de ces deux génératrices diminue à mesure que le plan sécant s'élève; enfin, le conoïde se termine par une arête DB.

Coupons la surface par un plan EFE′ parallèle au plan du cercle; ce plan a pour équation $x=a'$; la courbe d'intersection

$$\frac{z^2}{r^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a'r}{a}\right)^2}=1$$

est une ellipse dont le demi-axe IF est constamment égal à r et dont l'autre axe EE′ diminue jusqu'à zéro, quand le plan sécant se rapproche de l'axe du conoïde.

SURFACES DE RÉVOLUTION.

453—On appelle surface de révolution une surface engendrée par la rotation d'une ligne autour d'un axe fixe auquel elle est invariablement liée. Chaque point M de la génératrice décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe et qui a pour centre le pied P de la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe. Les cercles décrits par les différents points de la génératrice ont été nommés les *parallèles* de la surface. Les sections faites par des plans qui passent par l'axe sont égales entre elles; ce sont les *méridiens* de la surface. Ordinairement on choisit pour génératrice de la surface une courbe méridienne.

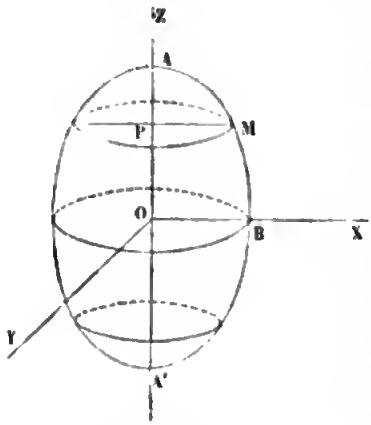


Fig. 242.

On peut aussi concevoir une surface de révolution comme engendrée par le mouvement d'un cercle, de rayon variable, dont le centre parcourt une ligne droite, dont le plan reste

perpendiculaire à cette droite, et qui rencontre la génératrice donnée.

Supposons d'abord que l'on prenne l'axe de rotation pour axe des z, les coordonnées étant rectangulaires ; un parallèle de la surface sera représenté par des équations de la forme

$$x^2+y^2=\alpha,\ z=\beta;$$

en exprimant que ce cercle rencontre la génératrice donnée, on obtiendra une équation de condition $\varphi(\alpha,\beta)=0$ entre les deux paramètres variables α et β. Si l'on élimine α et β entre cette équation et les deux équations du parallèle, on aura l'équation

$$(6)\quad \varphi(x^2+y^2, z)=0$$

de la surface de révolution.

454—Cherchons, par exemple, l'équation de la surface engendrée par une droite AB, tournant autour d'un axe OZ.

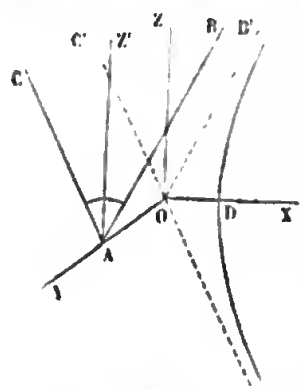


Fig. 243.

Prenons l'axe de rotation pour axe des z, la perpendiculaire commune entre l'axe et la droite AB dans une de ses positions pour axe des y, et une perpendiculaire au plan YOZ pour axe des x. La droite AB, dans cette position particulière, aura pour équations

$$y=a,\ x=mz,$$

a étant la plus courte distance OA, m la tangente trigonométrique de l'angle ZOB' que fait l'axe OZ avec la droite OB' parallèle à AB. Pour que le cercle parallèle

$$x^2+y^2=\alpha,\ z=\beta$$

rencontre la droite AB, il faut que l'équation de condition

$$\alpha-m^2\beta^2=a^2,$$

que l'on obtient, en éliminant x, y, z entre les équations de la droite et celles du cercle, soit vérifiée; l'élimination des deux paramètres variables α et β entre cette équation de condition et celle du cercle, donne l'équation de la surface de révolution

$$(7)\quad x^2+y^2-m^2z^2=a^2.$$

Si l'on fait $y=0$ dans cette équation, on obtient la trace de la surface sur le plan XOZ; c'est une hyperbole

$$x^2-m^2z^2=a^2,$$

ayant son axe transverse OD dirigé suivant OX, et pour asymptotes les droites OB′ et OC′ également inclinées de part et d'autre sur OZ. On peut considérer la surface comme engendrée par cette hyperbole méridienne tournant autour de son axe imaginaire. C'est pourquoi on lui a donné le nom d'*hyperboloïde* de révolution à une nappe.

L'équation (7) ne renfermant le coefficient angulaire m qu'au carré, il est clair que la même surface sera engendrée par les deux droites AB et AC, toutes deux perpendiculaires à OA, et également inclinées de part et d'autre sur la droite AZ′ parallèle à OZ.

455—Considérons en particulier le cas où la génératrice est la courbe méridienne que l'on peut supposer placée dans le plan XOZ et représentée par les équations

$$y=0,\ \psi(x,z)=0.$$

Si l'on élimine x, y, z entre les deux équations et celles du parallèle

$$x^2+y^2=\alpha,\quad z=\beta,$$

on obtient l'équation de condition

$$\psi(\sqrt{\alpha},\beta)=0.$$

L'équation de la surface de révolution est donc

$$\psi(\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0,$$

On l'obtient en remplaçant x par $\sqrt{x^2+y^2}$ dans l'équation du méridien.

Par exemple, si la courbe méridienne est l'hyperbole $x^2-m^2z^2=a^2$, l'hyperboloïde de révolution à une nappe aura pour équation

$$x^2+y^2-m^2z^2=a^2.$$

Comme second exemple, considérons le *tore*, c'est-à-dire la surface engendrée par un cercle tournant autour d'un axe situé dans son plan sans passer par le centre. Si l'on prend

pour axe des z l'axe de révolution, et pour axe des x une perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur l'axe, l'équation du cercle dans le plan des xz étant

$$(x-a)^2+z^2=r^2,$$

celle de la surface sera

$$(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=r^2.$$

456—Supposons maintenant que l'axe de rotation OL passe par l'origine, mais ait une direction quelconque dans l'espace.

Soient

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

les équations de cette droite. Tout parallèle de la surface sera donné par l'intersection d'une sphère décrite de l'origine comme centre et d'un plan perpendiculaire à l'axe; ce cercle sera donc représenté par deux équations de la forme

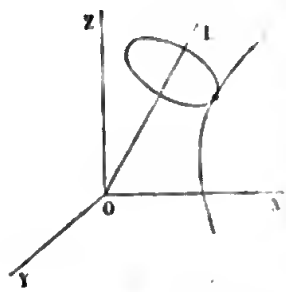


Fig. 241.

$$x^2+y^2+z^2=\alpha,$$
$$ax+by+cz+d=\beta.$$

En écrivant que le parallèle rencontre la génératrice donnée, on aura une équation de condition $\varphi(\alpha, \beta)=0$ entre les deux paramètres variables α et β. L'élimination de ces deux paramètres entre cette équation de condition et les deux équations du cercle conduira à l'équation de la surface de révolution

$$(8)\quad \varphi(x^2+y^2+z^2,\ ax+by+cz+d)=0.$$

C'est une équation entre le polynôme du second degré $x^2+y^2+z^2$ et un polynôme quelconque du premier degré.

Réciproquement toute équation de cette forme représente une surface de révolution autour d'une droite passant par l'origine. Considérons, en effet, la droite OL qui a pour équations

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

et posons

$$x^2+y^2+z^2=\alpha$$
$$ax+by+cz+d=\beta;$$

l'équation proposée (8) devient $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. A tout système de valeurs réelles de α et de β (α étant positive) vérifiant cette équation, correspond un cercle donné par l'intersection d'une sphère ayant l'origine pour centre, et d'un plan perpendiculaire à la droite OL; le centre du cercle sera situé sur la droite OL et le lieu des cercles formera une surface de révolution autour de cette droite.

Supposons enfin que l'axe de rotation ne passe pas par l'origine; prenons un point fixe (x_0, y_0, z_0) sur cet axe dont les équations seront

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

Tout parallèle de la surface sera donné par l'intersection d'une sphère

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = \alpha$$

ayant son centre au point fixe, et d'un plan

$$ax+by+cz+d = \beta$$

perpendiculaire à l'axe, l'équation de la surface de révolution sera donc de la forme

$$(9)\quad \varphi[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,\ ax+by+cz+d] = 0.$$

PLAN TANGENT.

457—Nous commencerons par rappeler un théorème démontré en algèbre; supposons que les lettres y et z désignent deux fonctions de la variable x, assujetties à vérifier l'équation

$$(1)\quad f(x, y, z) = 0.$$

Si l'on désigne par y' et z' les dérivées de ces deux fonctions par rapport à la variable x, ces deux dérivées sont liées entre elles par la relation

$$(2)\quad f'_x + y' f'_y + z' f'_z = 0.$$

En effet, quand y et z sont des fonctions quelconques de la variable x, la fonction $f(x, y, z)$ est une fonction *composée* de cette même variable, et cette fonction a pour dérivée

$$f'_x + y' f'_y + z' f'_z.$$

Si l'on suppose maintenant que les fonctions y et z vérifient l'équation (1), la fonction $f(x, y, z)$ étant constamment nulle,

sa dérivée est aussi constamment nulle, et, par conséquent, les deux quantités y' et z' vérifient l'équation (2).

458—Cela posé, considérons la surface représentée par l'équation (1). Soit M un point de cette surface ayant pour coordonnées x, y, z; par le point M traçons sur la surface une courbe quelconque MA; quand le point M parcourt la courbe, deux des coordonnées y et z peuvent être regardées comme des fonctions de la troisième x; la nature de ces fonctions dépend de la courbe MA tracée sur la surface; mais elles satisfont constamment à l'équation (1), et par suite leurs dérivées à l'équation (2). Appelons x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un second point M_1 appartenant à la courbe, et voisin du point M; la sécante MM_1 est représentée par les équations

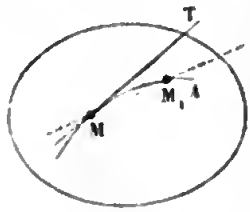


Fig. 245.

$$Y-y=\frac{y_1-y}{x_1-x}(X-x),\quad Z-z=\frac{z_1-z}{x_1-x}(X-x),$$

les lettres X, Y, Z désignant les coordonnées d'un point quelconque de la droite. Quand le point M_1 se rapproche indéfiniment du point M, les rapports $\frac{y_1-y}{x_1-x}$, $\frac{z_1-z}{x_1-x}$ ont pour limites les valeurs des dérivées y' et z' des deux fonctions y et z au point M; la tangente MT à la courbe au point M est donc représentée par les équations

$$Y-y=y'(X-x),\quad Z-z=z'(X-x).$$

Ces équations renferment deux paramètres variables y' et z' assujettis à vérifier l'équation (2). On obtiendra le lieu des tangentes au point M à toutes les courbes tracées sur la surface et passant par ce point, en éliminant ces deux paramètres entre les deux équations de la tangente et l'équation de condition (2). Ce lieu a pour équation

$$(3)\quad (X-x)f'_x+(Y-y)f'_y+(Z-z)f'_z=0.$$

C'est un plan qu'on appelle le *plan tangent* à la surface au point M.

La *normale* à la surface au point M est la perpendiculaire

menée par le point M au plan tangent à la surface en ce point. Elle a pour équations

$$(4)\quad \frac{X-x}{f'_x}=\frac{Y-y}{f'_y}=\frac{Z-z}{f'_z},$$

459—Nous avons démontré qu'en général les tangentes aux diverses courbes tracées sur une surface par un point M sont dans un même plan; il y a cependant des exceptions; c'est lorsque les trois dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z sont nulles au point M; car alors l'équation de condition (2) devient une identité, et pour trouver le lieu des tangentes, il faut recourir à un calcul plus compliqué. Cette circonstance se présente au sommet d'un cône; les tangentes aux diverses courbes tracées sur la surface par ce point sont les arêtes du cône, et le lieu des tangentes est le cône lui-même. Lorsqu'une surface a un point singulier de cette sorte, le lieu des tangentes en ce point, au lieu d'être un plan, est un cône d'un degré plus ou moins élevé.

460—Si par le point M on trace deux courbes sur la surface, et qu'on mène leurs tangentes, le plan de ces deux droites est le plan tangent. Lorsque, par le point M passe une droite située sur la surface, cette droite, étant elle-même sa propre tangente, est comprise dans le plan tangent. Certaines surfaces réglées, parmi lesquelles nous citerons le cylindre et le cône, jouissent de cette propriété que le plan tangent est le même pour tous les points d'une même génératrice. Mais ceci n'a pas lieu pour toutes les surfaces réglées; considérons, par exemple, le conoïde dont nous avons trouvé l'équation au n° 452; les sections par des plans parallèles au plan YOZ sont des ellipses dont l'un des axes est coustant et l'autre variable; les tangentes à ces diverses ellipses aux points situés sur une même génératrice GH ne sont pas parallèles, et par conséquent, le plan tangent tourne autour de la génératrice GH quand le point de contact se meut sur cette droite. Par exception, le plan tangent est le même le long de la génératrice DB. En chaque point G de l'axe OZ, il y a deux plans tangents OGH, OGH'.

Nous rappellerons encore que le plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien qui passe au point de contact, ou, en d'autres termes, que la normale a la surface est contenue dans le plan méridien.

Une courbe dans l'espace étant définie par l'intersection de deux surfaces, sa tangente sera donnée par l'intersection des plans tangents aux deux surfaces.

EXERCICES.

1° L'axe d'un cône de révolution passe à l'origine des coordonnées et fait avec les axes des angles α, β, γ; l'angle du cône est θ; trouver l'équation de la surface.

Comme application, trouver les conditions pour que l'équation du second degré

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

représente un cône de révolution.

2° Étant donné un ellipsoïde de révolution aplati (surface engendrée par une ellipse tournant autour de son petit axe); le cône, engendré par une droite qui tourne autour du foyer de l'une des ellipses méridiennes en s'appuyant sur la section faite dans la surface par un plan passant par la directrice qui correspond à ce foyer, est un cône de révolution.

3° Étant donné un ellipsoïde de révolution allongé (surface engendrée par une ellipse tournant autour de son grand axe), le cône, qui a pour sommet l'un des deux foyers des sections méridiennes et pour base une section plane quelconque, est de révolution.

4° La projection d'une section plane du cône circulaire droit sur un plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet du cône, a pour l'un de ses foyers le sommet du cône, et pour directrice correspondante la droite de rencontre des deux plans.

5° Lorsqu'une section plane d'un cône circulaire droit est une ellipse, la somme des arêtes qui aboutissent aux extrémités d'un diamètre de l'ellipse est constante.

6° Démontrer qu'un plan tangent au tore et passant par le centre coupe la surface suivant deux cercles.

7° Trouver la section droite d'un cylindre circonscrit à un tore.

8° Démontrer que les six arêtes de deux trièdres trirectangles, ayant même sommet, appartiennent à un même cône du deuxième degré.

9° Étant donné un conoïde dont l'axe est perpendiculaire au plan directeur et qui enveloppe une sphère ; trouver les projections de la courbe de contact sur le plan directeur et sur le plan mené par l'axe et le centre de la sphère.

10° Étant donné un système d'axes rectangulaires, un tore a pour méridien dans le plan ZOX un cercle qui a son centre sur l'axe OX; cet axe rencontre le cercle en un point A, centre d'un nouveau cercle égal au premier et compris dans un plan parallèle à ZOY, une droite qui reste parallèle au plan XOY décrit un conoïde en s'appuyant sur ce second cercle et sur l'axe OZ ; on demande la projection sur le plan XOY de la courbe de rencontre des deux surfaces.

11° On suppose que le plan du second cercle du problème précédent s'enroule sur un cylindre circonscrit au tore et ayant des arêtes parallèles à l'axe du tore, et on remplace la directrice courbe du conoïde par la courbe en laquelle s'est transformée le cercle après l'enroulement du plan ; trouver la projection sur le plan XOY de la ligne de rencontre du nouveau conoïde et du tore (spirale d'Archimède).

12° Lorsque deux surfaces réglées ont une génératrice commune, il y a généralement deux points de cette génératrice pour lesquels le plan tangent à chacune des surfaces est le même ; déterminer ces deux points. Si les deux surfaces ont le même plan tangent pour trois points de la génératrice, elles se raccordent le long de cette droite.

13° Lorsque deux surfaces réglées, décrites par des droites qui se meuvent en restant parallèles au même plan, ont une génératrice commune, il y a généralement un point de cette droite, pour lequel les deux surfaces ont le même plan tan-

gent; déterminer ce point. Si les deux surfaces ont le même plan tangent en deux points de la génératrice commune, elles se raccordent le long de cette droite.

14° Une sphère a son centre à l'origine des coordonnées que l'on suppose rectangulaires, l'axe OX perce la sphère en un point A; dans le plan XOY, sur OA comme diamètre, on décrit un cercle qui sert de base à un cylindre dont les arêtes sont parallèles à OZ; trouver, 1° les projections sur les trois plans coordonnés de la courbe de rencontre du cylindre et de la sphère; 2° l'équation du cône qui a pour directrice cette courbe et pour sommet le point A, ce cône est un cône de révolution; 3° les traces sur les plans des coordonnées des tangentes à la courbe.

CHAPITRE V.

De la similitude.

461—Les définitions de l'*homothétie* et de la *similitude* pour les figures à trois dimensions sont les mêmes que celles des figures planes (livre IV, chap. v). En Géométrie plane, si l'on fait abstraction de la position des systèmes, l'homothétie inverse ne donne pas d'autres figures que l'homothétie directe; il n'en est plus de même pour les figures dans l'espace. Considérons un premier système de points A, B, C...., et après avoir choisi arbitrairement un centre de similitude, construisons un système A′, B′, C′.... homothétique direct et un système A″, B″, C″.... homothétique inverse avec le même rapport de similitude k; ces deux systèmes sont symétriques l'un de l'autre par rapport au point O. On les rend symétriques l'un de l'autre par rapport à un plan quelconque, mené par le centre de similitude, en faisant tourner l'un d'eux de 180° autour d'une perpendiculaire menée par le point O à ce plan. Il résulte de là que les systèmes homothétiques inverses du système donné sont les symétriques des systèmes homothétiques directs.

462—On sait (n° 354) qu'une droite a pour homothétique une droite parallèle. Considérons un plan P et, dans ce plan, une série de droites passant par un même point M; chacune d'elles aura pour homothétique une droite parallèle passant par un point M′ homothétique de M. On en conclut que *la figure homothétique d'un plan est un plan parallèle.*

Si le plan P passe au centre de similitude, il est à lui-même son homothétique.

Puisque deux plans ont pour homothétiques deux plans parallèles, *l'angle de deux plans est égal à l'angle des plans homothétiques.*

Les sécantes, qui joignent deux points homologues de deux courbes homothétiques quelconques, étant constamment parallèles, on en conclut que *les tangentes aux points homologues sont parallèles.*

Si l'on trace sur deux surfaces courbes deux séries de lignes homologues qui passent toutes par deux points homologues M et M′, les courbes homologues auront en M et M′ des tangentes parallèles; donc, *les plans tangents en deux points homologues de deux surfaces homothétiques sont parallèles.*

463—*Si, par deux points fixes, on mène des rayons parallèles, et, dans un rapport constant* k, *on forme deux systèmes homothétiques;* la démonstration est la même que celle du n° 355. Il en résulte également que *deux systèmes homothétiques à un troisième sont homothétiques entre eux;* quand les deux systèmes sont construits avec le même rapport de similitude, on peut les superposer. Ainsi, *avec un seul centre de similitude, en faisant varier le rapport* k *de* 0 *à* ∞, *on obtient tous les systèmes homothétiques à un système donné.* En particulier, si le système donné est compris dans un plan, les centres de similitude extérieurs au plan ne donnent pas d'autres systèmes que les centres compris dans le plan.

464—*Les six centres de similitude de quatre systèmes homothétiques deux à deux sont compris dans un même plan.*

Soient A, A′, A″, A‴ les quatre systèmes donnés ; par les trois centres de similitude O′, O″, O‴ des systèmes A et A′, A et A″, A et A‴ faisons passer un plan P; ce plan, passant par le point O′, est à lui-même son homologue dans les systèmes A et A′, il est aussi son homologue dans les systèmes A et A″ ; par conséquent, le plan P est à lui-même son homologue dans les systèmes A′ et A″; donc, il passe par leur centre de similitude. Le même raisonnement s'applique aux combinaisons A′ et A‴, A″ et A‴.

Lorsque deux figures à centres sont homothétiques directes, elles sont aussi homothétiques inverses; et réciproquement. La démonstration est la même que celle du n° 357. Il résulte de là que si les quatre systèmes considérés dans le théorème précédent ont des centres, on aura six points dans un même plan, en prenant, soit les six centres de similitude externes, soit, d'une manière convenable, trois centres externes et trois internes.

465—Le rapport des aires de deux polygones homothétiques étant égal à k^2, on voit que *le rapport des aires de deux polyèdres homothétiques, et par suite, le rapport des aires de deux surfaces homothétiques quelconques est égal à* k^2.

Lorsqu'on abaisse des perpendiculaires de deux sommets homologues de deux tétraèdres homothétiques sur les faces opposées, ces perpendiculaires sont deux droites homologues, elles ont pour rapport k, le rapport des bases étant k^2, il en résulte que *le rapport des volumes de deux tétraèdres homothétiques est égal à* k^3. Ce dernier théorème s'applique à deux polyèdres et même à deux solides quelconques homothétiques.

466—Une figure est semblable à une figure donnée lorsque, par un déplacement convenable, elle peut coïncider avec l'une des figures homothétiques à la figure donnée. Il résulte du n° 463 que l'on obtiendra toutes les surfaces semblables à une surface donnée, en prenant arbitrairement un centre de similitude, et en construisant avec ce centre les diverses sur-

faces homothétiques qui correspondent aux valeurs de k comprises entre 0 et ∞.

Exemple I. La surface donnée est une sphère. Prenons le centre de la sphère O pour centre de similitude; le rayon OA étant constant, le rayon OA′ sera également constant; *une surface semblable à une sphère est une autre sphère qui peut avoir un rayon quelconque.*

Exemple II. La surface donnée est un cône. Prenons le sommet pour centre de similitude, deux points homologues seront compris sur la même génératrice du cône donné. *La seule figure semblable à un cône est ce cône lui-même.*

Exemple III. La surface est un cylindre. Prenons un point arbitraire O pour centre de similitude, et traçons sur le cylindre donné une courbe arbitraire C que nous prendrons pour directrice du cylindre. A la courbe C correspond une courbe homothétique C′, et à toute génératrice du premier une droite parallèle passant par le point de cette courbe homologue du point où la courbe C est rencontrée par la première génératrice; ainsi, *deux cylindres sont homothétiques lorsqu'ils ont pour directrices deux courbes homothétiques et leurs génératrices parallèles.*

Considérons deux cylindres homothétiques, ayant le point O pour centre de similitude; si l'on mène par ce point une parallèle OO′ aux génératrices des deux surfaces, tout point de cette droite est un centre de similitude des deux surfaces. Il en résulte que les sections de deux cylindres homothétiques par le même plan sont des courbes homothétiques ayant pour centre de similitude le point où le plan coupe la droite OO′. Comme les sections d'un cylindre par des plans parallèles sont égales, les sections de deux cylindres homothétiques par des plans parallèles sont homothétiques.

467—*Les sections d'une surface du second degré par des plans parallèles sont des courbes homothétiques.* L'équation générale des surfaces du second degré est

$$(1)\quad Az^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2Bzx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F=0;$$

on obtient la projection sur le plan XOY de l'intersection de cette surface et du plan

$$(2) \quad ax + by + cz = l,$$

en éliminant la variable z entre les équations (1) et (2). Or, dans l'équation ainsi obtenue, les coefficients des termes du second degré sont indépendants de l, on en conclut que, lorsque l varie, a, b, c restant fixes, c'est-à-dire lorsque le plan se déplace parallèlement à lui-même, les projections sont homothétiques; les cylindres projectants, ayant pour directrices des courbes homothétiques, sont coupés par deux plans parallèles suivant des courbes homothétiques. Quand ces courbes sont des hyperboles, l'une peut être homothétique à la conjuguée de l'autre (n° 363).

LIVRE VI

SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE I.

Centre et Plans diamétraux.

468—L'équation générale du second degré entre les trois variables x, y, z est de la forme

$$(1)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F=0;$$

elle renferme dix termes, ou neuf paramètres arbitraires. Nous représenterons le premier membre par $f(x, y, z)$. On pourrait, en suivant la marche adoptée en Géométrie plane pour l'étude des lignes du second degré, examiner les diverses formes du lieu défini par cette équation; mais, à cause du grand nombre des cas à considérer, cette discussion serait longue et pénible. Nous commencerons par simplifier l'équation (1) et nous ne nous occuperons ensuite que des équations réduites. Nous baserons cette réduction sur les propriétés du centre et des plans diamétraux dont nous allons nous occuper d'abord.

DU CENTRE.

469—Un point I est le centre d'une surface lorsque les points de la surface sont placés symétriquement, deux à deux, par rapport à ce point. Comme une ligne droite ne rencontre une surface du second degré qu'en deux points, il faut, pour qu'un point I soit le centre de la surface, que toutes les cordes menées par ce point y soient divisées en deux parties égales.

Lorsque l'origine des coordonnées est centre d'une surface du second degré, l'équation de la surface ne contient pas de termes du premier degré. En effet, les équations d'une droite menée par l'origine sont de la forme

$$(2)\quad x=mz,\quad y=nz$$

Les coordonnées z des points de rencontre de la surface et de la droite sont déterminées par l'équation

$$(3)\quad (Am^2+A'n^2+A''+2Bn+2B'm+2B''mn)z^2+2(Cm+C'n+C'')z+F=0,$$

que l'on obtient en éliminant x et y entre les équations (1) et (2). Si l'origine est centre, l'équation (3) a ses racines égales et de signes contraires, ce qui exige que le coefficient $Cm+C'n+C''$ soit nul; et comme ceci doit avoir lieu pour une infinité de valeurs de m et de n, prises arbitrairement, il faut que l'on ait séparément

$$C=0,\quad C'=0,\quad C''=0.$$

La réciproque est vraie.

470—D'après cela, pour déterminer le centre d'une surface du second degré, on transporte l'origine en un point I de l'espace, dont nous désignerons les coordonnées par a, b, c, et l'on cherche s'il est possible de choisir ces valeurs de manière que la nouvelle équation ne contienne pas de termes du premier degré par rapport aux coordonnées nouvelles.

Lorsqu'on déplace les axes parallèlement à eux-mêmes, les formules de transformation sont

$$x=a+x',\quad y=b+y',\quad z=c+z';$$

substituons dans l'équation (1) et effaçons les accents, nous aurons

$$(4)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+xf'_a(a,b,c)+yf'_b(a,b,c)$$
$$+zf'_c(a,b,c)+f(a,b,c)=0.$$

Les coordonnées du centre sont donc déterminées par les équations

$$f'_a(a,b,c)=0,\quad f'_b(a,b,c)=0,\quad f'_c(a,b,c)=0;$$

si l'on divise par 2 et si l'on remplace les lettres a, b, c par x, y, z, ces équations s'écrivent

$$(5)\quad \begin{cases} Ax+B''y+B'z+C=0, \\ B''x+A'y+Bz+C'=0, \\ B'x+By+A''z+C''=0. \end{cases}$$

Ainsi, *on obtient les coordonnées du centre en égalant à zéro les dérivées partielles du premier membre de l'équation de la surface prises par rapport aux variables* x, y, z.

471—Si l'on regarde x, y, z comme étant les coordonnées d'un point variable, chacune des équations (5) définit un plan; le centre de la surface est le point commun aux trois plans. Plusieurs cas peuvent se présenter.

1° Les trois plans se coupent en un point unique; la surface admet alors un centre unique.

2° Les trois plans se coupent deux à deux suivant des droites parallèles, ou d'eux d'entre eux au moins sont parallèles; dans ce cas, les trois plans n'ayant pas de point commun, la surface n'a pas de centre.

3° Les trois plans se coupent suivant la même droite ou se confondent en un seul; tous les points de la droite ou du plan sont centres de la surface.

La résolution des équations (5) donne pour valeur du dénominateur commun D,

$$(6)\quad D = AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B''.$$

Lorsque D n'est pas nul, les équations sont vérifiées par un système de valeurs finies et par un seul; la surface admet un centre unique. Lorsque D est nul, il y a impossibilité ou indétermination, et par conséquent, la surface est dépourvue de centre, ou elle en admet une infinité.

472—Supposons que tous les points de la droite CC′ (fig. 246) soient des centres. Si l'on joint un point M de la surface à un point quelconque I de la droite CC′, et que l'on prolonge d'une longueur IN égale à MI, le point N appartient à la surface; en joignant ainsi le point M à tous les points de CC′, on obtient une droite NN′ parallèle à CC′. Si l'on joint maintenant le point N à tous les points de CC′, on forme de même une seconde droite MM′ parallèle à NN′. La surface se compose donc de droites parallèles à CC′ et situées deux à deux dans un même plan avec cette droite et à égale distance de part et d'autre; c'est un cylindre qui a pour axe CC′, et comme la trace du

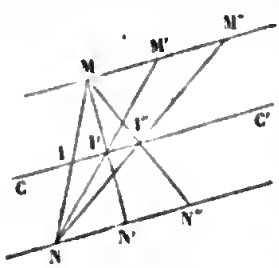


Fig. 246.

cylindre sur un plan non parallèle aux arêtes est une courbe du second degré, ce cylindre est un cylindre elliptique ou hyperbolique.

Le raisonnement précédent démontre que, dans le cas que nous considérons, l'équation (1) ne peut pas représenter d'autres surfaces courbes que des cylindres elliptiques ou hyperboliques; mais il peut arriver que cette équation représente une seule droite ou deux plans, et enfin qu'elle n'ait pas de solutions réelles.

On démontre de la même manière que, lorsque tous les points d'un plan sont des centres, l'équation (1) représente, ou deux plans parallèles, ou un plan unique, ou qu'elle n'admet pas de solutions réelles.

473—Lorsque la surface admet un centre I ayant pour coordonnées a, b, c, si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point, l'équation (1) se réduit à

$$(7)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+F_1=0,$$

en posant

$$F_1=Aa^2+A'b^2+A''c^2+2Bbc+2B'ca+2B''ab+2Ca+2C'b+2C''c+F.$$

Les nombres a, b, c vérifient les relations (5), c'est-à-dire que l'on a

$$Aa+B''b+B'c+C=0,$$
$$B''a+A'b+Bc+C'=0,$$
$$B'a+Bb+A''c+C''=0.$$

Si l'on multiplie les deux membres de chacune de ces égalités respectivement par a, b, c et que l'on ajoute, on a

$$Aa^2+A'b^2+A''c^2+2Bbc+2B'ca+2B''ab+Ca+C'b+C''c=0.$$

La valeur de F_1 se réduit donc à

$$F_1=F+Ca+C'b+C''c;$$

on l'obtient en *ajoutant à l'ancien terme constant la moitié des valeurs que prennent les termes du premier degré lorsqu'on y remplace* x, y, z *par les coordonnées du centre*.

Lorsque la nouvelle constante F_1 est égale à zéro, l'équation (7), étant homogène par rapport à x, y, z, ne peut représenter qu'un cône ayant pour sommet l'origine; cependant, le lieu peut se réduire à deux plans, à une droite, ou à un point.

474—Nous avons vu que les tangentes aux diverses courbes tracées par un même point sur une surface sont situées dans un même plan; il n'y a d'exception que lorsque les coordonnées du point annulent à la fois les trois dérivées partielles du premier membre de l'équation par rapport à x, y, z. Dans le cas des surfaces du second degré, un pareil point est centre de la surface; ce point étant aussi situé sur la surface, quand on y transporte l'origine des coordonnées, la constante F_1 est nulle; ainsi, pour les surfaces du second degré, l'exception n'a lieu que dans le cas du cône, quand le point est le sommet.

PLANS DIAMÉTRAUX.

475—Une ligne droite ne perce une surface du second degré qu'en deux points; la surface, qui partage en deux parties égales les cordes parallèles à une même direction, a été appelée surface diamétrale.

Soient m et n les paramètres constants qui définissent la direction des cordes; transportons les axes parallèlement à eux-mêmes en un point quelconque de l'espace, ayant pour coordonnées a, b, c, l'équation (1) prend la forme (4). Une droite, menée par la nouvelle origine dans la direction donnée, est représentée par les équations

$$x = mz, \quad y = nz.$$

On obtient l'équation qui donne les coordonnées z des points de rencontre de la droite et de la surface, en remplaçant, dans l'équation (4), x par mz, y par nz; on a ainsi

$$(8)\quad [Am^2+A'n^2+A''+2Bn+2B'm+2B''mn]z^2+[mf'_a+nf'_b+f'_c]z+f(a,b,c)=0.$$

Pour que le point (a, b, c) soit le milieu de la corde menée par ce point dans la direction donnée, il faut que l'équation précédente ait ses deux racines égales et de signes contraires, ce qui exige que les coordonnées a, b, c vérifient la relation

$$mf'_a+nf'_b+f'_c=0.$$

Cette équation, étant vérifiée par les coordonnées du point milieu de l'une quelconque des cordes de la série considérée,

représente le lieu cherché. Remplaçons a, b, c par x, y, z; cette équation s'écrit

$$(9)\quad mf'_x(x,y,z)+nf'_y(x,y,z)+f'_z(x,y,z)=0;$$

comme elle est du premier degré, elle représente un plan. Ainsi, *dans les surfaces du second degré, pour toutes les directions de cordes, la surface diamétrale est un plan.*

476—Si les paramètres m et n satisfont à la relation

$$Am^2+A'n^2+A''+2Bn+2B'm+2B''mn=0,$$

l'équation (8) s'abaisse au premier degré, c'est-à-dire que les droites parallèles à la direction donnée ne percent la surface qu'en un point, il n'y a pas de plan diamétral correspondant à cette direction.

L'équation (9) est vérifiée, quelles que soient m et n, par les valeurs de x, y, z qui satisfont à la fois aux trois équations qui déterminent le centre

$$f'_x=0,\quad f'_y=0,\quad f'_z=0;$$

il en résulte que tous les plans diamétraux passent par le centre de la surface, quand il en a un, ou par le lieu des centres s'il y en a une infinité.

477—Lorsque la surface est dépourvue de centre, les trois plans définis par les équations (5) sont parallèles, ou la droite d'intersection de deux d'entre eux est parallèle au troisième. Dans le premier cas on a

$$f'_x=\alpha f'_z+p,\quad f'_y=\beta f'_z+q,$$

α, β, p, q désignant des constantes; l'équation (9) se réduit à

$$f'_z(\alpha m+\beta n+1)+mp+nq=0;$$

elle représente, pour toutes les valeurs de m et de n, des plans parallèles entre eux. Dans le second cas, si les plans définis par les deux équations $f'_x=0$, $f'_y=0$ se coupent suivant une droite parallèle au plan $f'_z=0$, l'équation générale des plans qui passent par la droite d'intersection des deux premiers étant $\alpha f'_x+\beta f'_y=0$, on a

$$f'_z=\alpha f'_x+\beta f'_y+r,$$

α, β, r étant des constantes; et par suite l'équation (9) prend la forme

$$(m+\alpha)f'_x+(n+\beta)f'_y+r=0;$$

elle représente des plans parallèles à la droite d'intersection des deux plans

$$f'_x=0, \quad f'_y=0.$$

Ainsi *les surfaces dépourvues de centre ont leurs plans diamétraux parallèles à une même droite ou parallèles entre eux.*

478—Considérons une direction à laquelle corresponde un plan diamétral; si l'on prend pour axe des z une des cordes, pour axe des x et des y deux droites situées dans le plan diamétral, l'équation de la surface devra être vérifiée par deux valeurs de z égales et de signes contraires pour chaque système de valeurs attribuées arbitrairement aux variables x et y. Elle aura donc la forme

$$Pz^2+f_1(x,y)=0,$$

$f_1(x,y)$ désignant une fonction qui ne renferme plus que les variables x et y et dont le degré ne surpasse pas 2. Déplaçons les axes des x et des y dans le plan XOY en conservant à l'axe des z sa direction; ce changement de coordonnées s'effectue par les formules de la Géométrie plane. Lorsque la fonction $f_1(x,y)$ est du second degré, nous avons vu (liv. III, chap. II), que l'on peut, d'une infinité de manières choisir les nouveaux axes Ox, Oy, de telle sorte que cette fonction se réduise à l'une des formes

$$Mx^2+Ny^2+F_1, \quad Ny^2+Qx, \quad Ny^2+F_1,$$

et alors l'équation de la surface sera elle-même ramenée à l'une des formes

$$\text{(I)} \quad Mx^2+Ny^2+Pz^2+F_1=0,$$
$$\text{(II)} \quad Ny^2+Pz^2+Qx=0,$$
$$\text{(III)} \quad Ny^2+Pz^2+F_1=0.$$

Si la fonction F_1 est du premier degré, on la ramène par le même changement à la forme Qx, et l'équation de la surface devient

$$\text{(IV)} \quad Pz^2+Qx=0.$$

Enfin, si F_1 ne contient pas les variables x et y, l'équation de la surface est

$$(V)\ Py^2+F_1=0.$$

479—Dans ce qui précède M, N, P, Q désignent des constantes différentes de zéro et F_1 une constante qui peut être nulle. L'équation (III), si elle a des solutions réelles, représente un cylindre elliptique ou hyperbolique, une droite ou deux plans qui se coupent. L'équation (IV) représente un cylindre parabolique. Si l'équation (V) a des solutions réelles, elle représente deux plans parallèles ou un plan unique. Ainsi quand on fait abstraction des cylindres, on voit que l'équation du second degré peut, d'une infinité de manières, être ramenée à l'une des formes (I) et (II).

Considérons l'équation (I); en égalant à zéro les dérivées partielles de son premier membre, on obtient trois équations qui ont une solution unique; la surface admet donc un centre unique, l'origine des coordonnées. Chacun des plans des coordonnées est le plan diamétral des cordes parallèles à l'intersection des deux autres; à cause de cette propriété, on les nomme plans diamétraux conjugués.

L'équation (II) représente des surfaces dépourvues de centre, puisque l'équation $f'_x=0$ se réduit à $Q=0$. Le plan XOZ partage en deux parties égales les cordes parallèles à OY et le plan XOY les cordes parallèles à OZ; les lignes parallèles à OX ne percent la surface qu'en un point, et il n'y a pas de plan diamétral correspondant.

PLANS DIAMÉTRAUX PRINCIPAUX.

480—Parmi les plans diamétraux d'une surface du second degré, on distingue en particulier ceux qui sont perpendiculaires aux cordes qu'ils divisent en deux parties égales; ce sont des plans de symétrie de la figure. Dans ce qui précède, les axes de coordonnées étaient quelconques; dans la recherche des plans principaux, nous supposerons les axes rectangulaires. Si l'on désigne par α, α', α'' les cosinus des angles que

fait avec les axes une direction donnée, les équations d'une corde peuvent se mettre sous la forme

$$(10)\quad \frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma}=\rho,$$

a, b, c étant les coordonnées d'un point particulier de cette corde, et x, y, z celles d'un point quelconque de cette même corde. La lettre ρ désigne la distance du premier point au second, affectée du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est comptée dans la direction donnée ou dans la direction opposée.

On obtient l'équation qui donne les distances du point I aux points de rencontre de la corde et de la surface en remplaçant dans l'équation (4) les lettres x, y, z par $\alpha\rho$, $\beta\rho$, $\gamma\rho$, ce qui donne

$$(11)\quad S\rho^2+2T\rho+R=0,$$

en posant, pour abréger

$$(12)\quad \begin{cases} S=A\alpha^2+A'\alpha'^2+A''\alpha''^2+2B\alpha'\alpha''+2B'\alpha''\alpha+2B''\alpha\alpha', \\ T=\alpha f'_a(a,b,c)+\alpha' f'_b(a,b,c)+\alpha'' f'_c(a,b,c), \\ R=f(a,b,c). \end{cases}$$

Si l'on suppose le point I fixe et que l'on fasse varier les angles α, α', α'', on peut regarder l'équation (11) comme représentant la surface en coordonnées polaires. Le coefficient S de ρ^2 ne dépend que de la direction du rayon vecteur, le terme constant R ne dépend que de la position du point I, tandis que le coefficient T varie à la fois avec la direction du rayon vecteur et la position du point I.

481—L'équation du plan diamétral des cordes parallèles à la direction $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ prend la forme

$$\alpha f'_x+\alpha' f'_y+\alpha'' f'_z=0,$$

c'est-à-dire

$$(13)\quad (A\alpha+B''\alpha'+B'\alpha'')x+(B''\alpha+A'\alpha'+B\alpha'')y+(B'\alpha+B\alpha'+A''\alpha'')z+C\alpha+C'\alpha'+C''\alpha''=0.$$

Soient λ, μ, ν les cosinus des angles que fait avec les axes des coordonnées la normale à ce plan diamétral, θ l'angle de la normale avec la direction des cordes, on a

$$\frac{\lambda}{A\alpha+B''\alpha'+B'\alpha''}=\frac{\mu}{B''\alpha+A'\alpha'+B\alpha''}=\frac{\nu}{B'\alpha+B\alpha'+A''\alpha''}$$
$$=\frac{\alpha\lambda+\alpha'\mu+\alpha''\nu}{\alpha(A\alpha+B''\alpha'+B'\alpha'')+\alpha'(B''\alpha+\ldots)+\ldots}=\frac{\cos\theta}{S}.$$

Pour que le plan diamétral soit un plan principal, il faut que la normale au plan coïncide avec la direction des cordes; on doit donc avoir les relations

$$(14)\quad \frac{\alpha}{A\alpha+B''\alpha''+B'\alpha''}=\frac{\alpha'}{B''\alpha+A'\alpha'+B\alpha''}=\frac{\alpha''}{B'\alpha+B\alpha'+A''\alpha''}=\frac{1}{S};$$

alors l'équation du plan principal devient

$$(15)\quad S(\alpha x+\alpha' y+\alpha'' z)+C\alpha+C'\alpha'+C''\alpha''=0.$$

482—Les équations (14) donnent les suivantes

$$(16)\quad \begin{cases}(A-S)\alpha+B''\alpha'+B'\alpha''=0,\\ B''\alpha+(A'-S)\alpha'+B\alpha''=0,\\ B'\alpha+B\alpha'+(A''-S)\alpha''=0;\end{cases}$$

en y joignant la relation

$$(17)\quad \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1,$$

on a à résoudre un système de quatre équations à quatre inconnues.

Les trois inconnues α, α', α'' ne pouvant être nulles en même temps, puisque la somme de leurs carrés doit être égale à l'unité, l'une au moins, par exemple α'', est différente de zéro. Pour résoudre ce système d'équations, on imaginera les premiers membres des trois équations (16) divisées par α'', on tirera des deux premières les valeurs des rapports $\frac{\alpha}{\alpha''}$, $\frac{\alpha'}{\alpha''}$; substituant dans la troisième, on aura une équation ne renfermant plus que l'auxiliaire S; la quantité S connue, comme on a déjà les valeurs des rapports $\frac{\alpha}{\alpha''}$, $\frac{\alpha'}{\alpha''}$, on obtiendra les cosinus au moyen de l'équation (17).

Au lieu de diviser par α'', supposons qu'on tire des deux premières des équations (16) les valeurs de α et α', et qu'on substitue dans la troisième, on arrivera à une équation de la forme $D_1\alpha''=0$; puisque α'' est différent de zéro, on aura

$D_1 = 0$; c'est l'équation en S. Mais il est évident que le polynôme D_1 n'est autre chose que le dénominateur commun des formules de résolution du système (16) considéré comme un système à trois inconnues α, α', α''. On observe aussi que l'on peut former ce polynôme en remplaçant dans le polynôme que nous avons appelé D (n° 471) les lettres A, A', A'' par A−S, A'−S, A''−S. L'équation qui donne l'inconnue S est donc

$$(18)\quad (A-S)(A'-S)(A''-S)-(A-S)B^2-(A'-S)B'^2-(A''-S)B''^2+2BB'B''=0;$$

quand on développe le polynôme par rapport aux puissances de S, on voit que le terme indépendant de S est la quantité D elle-même.

483 — Afin d'arriver à une forme d'équation plus commode à discuter, nous allons faire l'élimination d'une autre manière: multiplions les équations (16) respectivement par B, B', B'', et retranchons les résultats deux à deux, il vient

$$(19)\quad [(S-A)B+B'B'']\alpha=[(S-A')B'+BB'']\alpha'=[(S-A'')B''+BB']\alpha'',$$

ou

$$\frac{\alpha}{\dfrac{1}{(S-A)B+B'B''}}=\frac{\alpha'}{\dfrac{1}{(S-A')B'+BB''}}=\frac{\alpha''}{\dfrac{1}{(S-A'')B''+BB'}}.$$

Si l'on substitue dans l'une des mêmes équations, la première, par exemple, à la place de α, α', α'' les quantités proportionnelles, on trouve

$$\frac{(A-S)}{(S-A)B+B'B''}+\frac{B''}{(S-A')B'+BB''}+\frac{B'}{(S-A'')B''+BB'}=0,$$

ou

$$\frac{B'B''}{(S-A)B+B'B''}+\frac{B''B}{(S-A')B'+B''B}+\frac{BB'}{(S-A'')B''+BB'}-1=0,$$

ou encore

$$(20)\quad \frac{\dfrac{B'B''}{B}}{S-A+\dfrac{B'B''}{B}}+\frac{\dfrac{B''B}{B'}}{S-A'+\dfrac{B''B}{B'}}+\frac{\dfrac{BB'}{B''}}{S-A''+\dfrac{BB'}{B''}}-1=0.$$

DISCUSSION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

484—Considérons d'abord le cas le plus général, celui où aucun des coefficients B, B′, B″ n'est nul. Prenons l'équation en S sous la forme (20).

I.—Supposons que les trois nombres

$$A-\frac{B'B''}{B},\quad A'-\frac{B''B}{B'},\quad A''-\frac{BB'}{B''},$$

que nous désignerons, pour abréger, par a, b, c, soient différents; rangeons-les par ordre de grandeur, et soit

$$a<b<c.$$

Substituons successivement à la place de S, dans le premier membre de l'équation (20), les nombres

$$a\pm\varepsilon,\quad b\pm\varepsilon',\quad c\pm\varepsilon'',$$

(ε, ε', ε'' désignant de très-petites quantités positives). Par la première substitution, le premier terme de l'équation prend la valeur $\pm\frac{B'B''}{B\varepsilon}$, très-grande numériquement, tandis que les autres termes conservent des valeurs finies; ce premier terme donne donc son signe au polynôme. De même, par la seconde substitution, le second terme prend la valeur très-grande $\pm\frac{B''B}{B'\varepsilon'}$, tandis que les autres termes conservent des valeurs finies; ce second terme donne donc son signe au polynôme. De même, par la troisième substitution, le troisième terme $\pm\frac{B'B}{B''\varepsilon''}$ donne son signe au polynôme. Ainsi les résultats des substitutions ont respectivement les mêmes signes que les quantités

$$\pm\frac{B'B''}{B\varepsilon},\quad \pm\frac{B''B}{B'\varepsilon'},\quad \pm\frac{BB'}{B''\varepsilon''},$$

ou que les quantités

$$\pm BB'B''\varepsilon,\quad \pm BB''B\varepsilon',\quad \pm BB'B''\varepsilon'',$$

que l'on obtient en multipliant les précédentes respectivement par les nombres positifs $B^2\varepsilon^2$, $B'^2\varepsilon'^2$, $B''^2\varepsilon''^2$.

Quand S varie de $a+\varepsilon$ à $b-\varepsilon'$, le premier membre reste fini

et varie d'une manière continue; puisque ces deux nombres donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent entre eux une racine réelle de l'équation; ainsi il y a une racine réelle de l'équation comprise entre a et b. On reconnaît de la même manière qu'il y en a une seconde entre b et c. Il y en a une troisième plus grande que c ou plus petite que a, suivant que $BB'B''$ est positif ou négatif; en effet, quand on donne à S une valeur très-grande numériquement, le premier membre de l'équation (20) se réduit à -1; donc si la quantité $BB'B''$ est positive, le premier membre change de signe quand S varie de $c+\varepsilon''$ à $+\infty$, et, par suite, il existe une racine réelle plus grande que c; lorsque la quantité $BB'B''$ est négative, le premier membre change de signe quand S varie de $-\infty$ à $a-\varepsilon$; dans ce cas, la troisième racine est plus petite que a.

Ainsi, dans le cas que nous considérons, les trois racines de l'équation sont réelles et inégales. A chacune de ces racines correspond une direction des cordes unique et déterminée. En effet, aucune des quantités a, b, c ne satisfait à l'équation (20); car chacune de ces quantités rend infini un seul terme; si donc on substitue l'une des racines à la place de S, dans les relations (19), les trois parenthèses seront différentes de zéro, ce qui donne pour les trois cosinus des valeurs finies et déterminées.

11.—Supposons que deux des trois quantités a, b, c, par exemple a et b, soient égales. Les trois racines sont encore réelles et inégales; mais l'une d'elles devient égale à a. L'équation (20), dans laquelle les deux premiers dénominateurs sont égaux, se réduit, abstraction faite de cette racine, à une équation du second degré

$$\frac{B''\left(\frac{B}{B'}+\frac{B'}{B}\right)}{S-A+\frac{B'B''}{B}}+\frac{\frac{BB'}{B''}}{S-A''+\frac{BB'}{B''}}-1=0,$$

qui a ses deux racines réelles.

Pour chacune des deux racines de cette équation, aucune des trois parenthèses n'étant nulle, les relations (19) donnent une

direction unique et déterminée. Pour la première racine a, les deux premières parenthèses sont nulles, sans que la dernière le soit; il en résulte $\alpha''=0$; les trois équations (16) se réduisent à

$$B'\alpha+B\alpha'=0,$$

ce qui détermine encore une direction unique parallèle au plan des xy.

III.—Enfin si les trois quantités a, b, c sont égales, deux racines deviennent égales à a, et l'équation (20), dans laquelle les trois dénominateurs sont égaux, se réduit, abstraction faite de cette racine double, à une équation du premier degré

$$\frac{\frac{B'B''}{B}+\frac{B''B}{B'}+\frac{BB'}{B''}}{S-A+\frac{B'B''}{B}}-1=0.$$

A cette racine simple correspond une direction unique. Pour la racine double, les trois équations (16) se réduisent à une seule

$$B'B''\alpha+B''B\alpha'+BB'\alpha''=0;$$

il y a indétermination; toutes les directions parallèles au plan

$$B'B''x+B''By+BB'z=0$$

conviennent à cette racine double.

485—Considérons maintenant le cas où les trois coefficients B, B', B'' ne sont pas différents de zéro.

I.—Un seul coefficient est nul, par exemple B''. L'équation du troisième degré (18) devient

$$(S-A)(S-A')(S-A'')-(S-A)B^2-(S-A')B'^2=0.$$

Soit $A<A'$; la substitution de $-\infty$, A, A', $+\infty$ dans le premier membre donne des résultats affectés respectivement des signes $-, +, -, +$; donc l'équation a ses trois racines réelles et inégales, et les équations (16) donnent pour chacune d'elles une direction déterminée, puisqu'elles ne deviennent pas identiques.

II. — Deux coefficients sont nuls, par exemple B′ et B″. L'équation du troisième degré (18) se réduit à

$$(S-A)[(S-A')(S-A'')-B^2]=0;$$

les trois racines sont encore réelles et inégales, et les équations (16) donnent pour chacune d'elles une direction déterminée.

Cependant si la racine A annulait la parenthèse, c'est-à-dire si la relation

$$(A-A')(A-A'')-B^2=0$$

était satisfaite, cette racine A serait racine double. Pour cette racine double, les équations (16) se réduiraient à une seule

$$(A'-A)\alpha'+B\alpha''=0.$$

A cette racine double correspondraient toutes les directions parallèles au plan

$$(A'-A)y+Bz=0.$$

III. — Lorsque les trois coefficients B, B′, B″ sont nuls à la fois, l'équation en S prend la forme

$$(S-A)(S-A')(S-A'')=0;$$

et admet pour racines A, A′, A″. Quand ces trois racines sont inégales, les équations (16) montrent qu'à ces racines correspondent des directions respectivement parallèles à chacun des trois axes coordonnés. Si A=A′, à cette racine double correspondent toutes les directions parallèles au plan des xy. Enfin, si A=A′=A″, à cette racine triple correspondent toutes les directions de l'espace; il y a ici indétermination absolue; car les équations (16) deviennent alors des identités.

Ainsi, en résumé, *l'équation du troisième degré en S a toujours ses trois racines réelles. A une racine simple correspond une direction déterminée; à une racine double toutes les directions d'un plan; à une racine triple toutes celles de l'espace.*

486 — Soient $(\alpha, \alpha', \alpha'')$, (β, β', β'') les cosinus des angles que font avec les axes des coordonnées les directions qui correspondent à deux racines différentes S et S′. On a, en vertu des équations (16),

$$\begin{cases} A\alpha+B''\alpha'+B'\alpha''=S\alpha, \\ B''\alpha+A'\alpha'+B\alpha''=S\alpha', \\ B'\alpha+B\alpha'+A''\alpha''=S\alpha'', \end{cases} \qquad \begin{cases} A\beta+B''\beta'+B'\beta''=S\beta, \\ B''\beta+A'\beta'+B\beta''=S'\beta', \\ B'\beta+B\beta'+A''\beta''=S'\beta''. \end{cases}$$

Multiplions les premières équations respectivement par β, β', β'', les secondes par α, α', α'', et de la somme des premières retranchons celle des secondes ; il vient

$$(S-S')(\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta'')=0,$$

ou

$$\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0.$$

Donc *les directions qui correspondent à deux racines différentes sont perpendiculaires entre elles.*

Il en résulte que les directions qui correspoudent à une racine double sont toutes perpendiculaires à celle qui correspond à la troisième racine.

NOMBRE DES PLANS PRINCIPAUX.

487—Le plan diamétral des cordes parallèles à la direction $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ est donné par l'équation (15)

$$S(\alpha x+\alpha' y+\alpha'' z)+(C\alpha+C'\alpha'+C''\alpha'')=0.$$

Il en résulte qu'à *chaque direction des cordes donnée par une racine* S *différente de zéro correspond un plan principal.*

Si une racine S est nulle, le plan principal n'existe plus. Cependant si l'on a

$$C\alpha+C'\alpha'+C''\alpha''=0,$$

l'équation (15) devient une identité, et la position du plan principal est indéterminée; tout plan perpendiculaire à la direction des cordes est un plan principal. Dans ce cas, la surface est cylindrique.

D'après l'équation (11), si une racine S est nulle, les cordes ne rencontrent la surface qu'en un seul point.

Il est bon d'observer que l'équation en S a toujours au moins une racine différente de zéro; car les trois racines ne sont égales que si l'on a $B=B'=B''=0$; alors ces racines, étant égales à A, A', A'', ne sont pas toutes trois nulles, sans quoi l'équation proposée ne serait pas du second degré. On peut d'ailleurs démontrer cette propriété de l'équation (18), indé-

pendamment de l'étude que nous en avons faite ; en effet, si les trois racines étaient nulles, on aurait, en égalant à zéro les coefficients de S^2 et de S,

$$A+A'+A''=0,$$
$$AA'+A'A''+A''A-B^2-B'^2-B''^2=0;$$

si du carré de la première, on retranche le double de la seconde, on a

$$A^2+A'^2+A''^2+2B^2+2B'^2+2B''^2=0,$$

d'où

$$A=A'=A''=B=B'=B''=0.$$

On conclut de là que toute surface de second degré a au moins un plan principal.

488—Nous avons vu que, si l'on fait abstraction des cylindres, l'équation du second degré peut être ramenée à l'une des deux formes

$$(\alpha)\ Mx^2+Ny^2+Pz^2+F_1=0,$$
$$(\beta)\ Ny^2+Pz^2+Qx=0;$$

la première convient aux surfaces qui ont un centre unique, la seconde à celles qui sont dépourvues de centre. Si le plan diamétral qui a servi à effectuer la réduction est un plan principal, comme on peut effectuer les réductions ultérieures en prenant dans le plan principal deux axes rectangulaires, l'équation de la surface sera ramenée à l'une des deux formes (α) et (β) en coordonnées rectangulaires.

CHAPITRE II.

Réduction de l'Équation du second degré.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'équation du second degré peut se ramener à l'une des formes simples

$$Mx^2+Ny^2+Pz^2+R=0,$$
$$Ny^2+Pz^2+Qx=0,$$
$$Ny^2+Pz^2+R\ =0,$$
$$Pz^2+Qx=0,$$
$$Pz^2+R\ =0,$$

en coordonnées rectangulaires. Il nous reste à indiquer un moyen pratique d'effectuer cette réduction.

1er CAS. $D \lessgtr 0$.

489—On commence par transporter les axes parallèlement à eux-mêmes au centre de la surface; l'équation générale du second degré

$$(1)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F=0,$$

devient

$$(2)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+F_1=0;$$

les coefficients des termes du second degré ne changent pas, et nous avons appris à calculer la constante F_1 (nº 473).

Supposons d'abord les trois racines de l'équation du troisième degré en S différentes entre elles et désignons-les par S, S′, S″; soient de plus $(\alpha, \alpha', \alpha'')$, (β, β', β''), $(\gamma, \gamma', \gamma'')$ les cosinus des angles que font avec les axes les directions qui correspondent à ces trois racines. Si l'on change les axes des coordonnées en prenant ces trois directions pour celles des nouveaux axes, les formules de transformation sont

$$(3)\quad \begin{cases} x=\alpha x'+\beta y'+\gamma z', \\ y=\alpha' x'+\beta' y'+\gamma' z', \\ z=\alpha'' x'+\beta'' y'+\gamma'' z', \end{cases}$$

et l'équation de la surface aura la forme

$$Mx'^2+Ny'^2+Pz'^2+F_1=0,$$

puisqu'elle ne doit plus contenir les produits des variables. Mais on a

$$M=A\alpha^2+A'\alpha'^2+A''\alpha''^2+2B\alpha'\alpha''+2B'\alpha''\alpha+2B''\alpha\alpha',$$

c'est-à-dire $M=S$ (nº 480). Par la même raison on a $N=S'$ et $P=S''$. Ainsi, dans ce cas, l'équation réduite est

$$(4)\quad Sx'^2+S'y'^2+S''z'^2+F_1=0.$$

490—Il est facile de vérifier que les coefficients des rectangles des variables dans la nouvelle équation sont nuls. Prenons par exemple le coefficient B_1'' du terme en $x'y'$. Ce coefficient est

$$B_1''=A\beta\gamma+A'\beta'\gamma'+A''\beta''\gamma''+B(\beta'\gamma''+\gamma'\beta'')+B'(\beta''\gamma+\gamma''\beta)+B''(\beta\gamma'+\gamma\beta').$$

Or on a

$$A\beta+B''\beta'+B'\beta''=S\beta,$$
$$B''\beta+A'\beta'+B\beta''=S'\beta',$$
$$B'\beta+B\beta'+A''\beta''=S''\beta''.$$

Si l'on multiplie ces équations respectivement par γ, γ', γ'' et que l'on ajoute, il vient

$$B_1''=S'(\beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma'').$$

Les deux directions (β, β', β''), $(\gamma, \gamma', \gamma'')$ étant rectangulaires, on en conclut que $B_1''=0$. On verrait de même que $B_1=B_1'=0$.

491—Lorsque deux racines de l'équation du troisième degré sont égales, à la racine double correspondent une infinité de directions comprises dans un même plan; si l'on prend pour nouveaux axes deux droites rectangulaires comprises dans ce plan et la perpendiculaire au plan, la méthode précédente est applicable et l'on obtient l'équation

$$S(x'^2+y'^2)+S''z'^2+F_1=0,$$

qui représente une surface de révolution autour de l'axe OZ'. Enfin, si les trois racines sont égales, en prenant trois nouveaux axes quelconques rectangulaires entre eux, l'équation est toujours

$$S(x'^2+y'^2+z'^2)+F_1=0,$$

elle ne peut représenter qu'une sphère.

2e CAS. $D=0$.

492—Dans ce cas, commençons par changer la direction des axes, en prenant pour nouveaux axes les directions qui correspondent aux racines de l'équation du troisième degré, ou, si cette équation a des racines égales, un des systèmes en nombre infini de trois directions rectangulaires déterminées par ces racines. On démontre, comme on l'a fait algébriquement dans le cas précédent, que $B_1=B_1'=B_1''=0$; les coefficients des carrés des variables ont encore pour valeurs S, S', S''. Si donc une seule racine S est nulle et que l'on prenne pour axe OX' la direction déterminée par cette racine, l'équation de la surface est

$$S'y'^2+S''z'^2+2C_1x'+2C_1'y'+2C_1''z'+F=0.$$

Les coefficients C_1, C_1', C_1'' ont pour valeurs

$$C_1=C\alpha+C'\alpha'+C''\alpha'',$$
$$C_1'=C\beta+C'\beta'+C''\beta'',$$
$$C_1''=C\gamma+C'\gamma'+C''\gamma''.$$

En déplaçant les axes parallèlement à eux-mêmes, on ramène l'équation précédente à la forme

$$S'y^2+S''z^2+2C_1x=0,$$

si C_1 est différent de zéro, et à la forme

$$S'y^2+S''z^2+F_1=0,$$

si C_1 est nul. Le coefficient C_1 qui subsiste dans l'équation réduite est celui qui correspond à la racine simple $S=0$.

493—Si deux racines S et S' sont égales à zéro, par la première transformation l'équation devient

$$S''z'^2+2C_1x'+2C_1'y'+2C_1''z'+F=0.$$

Nous avons vu que les relations qui existent entre les trois cosinus de l'une des directions qui correspondent à la racine double $S=0$ se réduisent à deux. Pour déterminer l'une de ces directions, on peut joindre à ces deux équations une troisième prise à volonté; nous prendrons

$$C\beta+C'\beta'+C''\beta''=0;$$

de cette manière on aura $C_1'=0$. L'autre direction sera ensuite complétement déterminée, ainsi que le coefficient C_1. Cela posé, en déplaçant les axes parallèlement à eux-mêmes, on ramènera l'équation à la forme

$$S''z^2+2C_1x=0,$$

si C_1 est différent de zéro, et à la forme

$$S''z^2+R=0,$$

si C_1 est nul.

CHAPITRE III.

De l'Ellipsoïde.

494—Nous avons ramené l'équation des surfaces du second degré qui ont un centre unique à la forme

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 = H,$$

en rapportant la surface à ses trois plans principaux.

Supposons d'abord que les trois racines aient le même signe, par exemple le signe +. Si le terme constant H est négatif, l'équation n'est vérifiée par les coordonnées d'aucun point de l'espace. Si le terme constant H est égal à zéro, l'équation n'est satisfaite que pour $x = y = z = 0$; elle représente un seul point, l'origine. Considérons enfin le cas où H est plus grand que zéro, et posons

$$a = \sqrt{\frac{H}{S}}, \quad b = \sqrt{\frac{H}{S'}}, \quad c = \sqrt{\frac{H}{S''}};$$

l'équation se met sous la forme

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La coordonnée x ne peut varier que de $-a$ à $+a$, y de $-b$ à $+b$, z de $-c$ à $+c$; prenons sur l'axe des x, de part et d'autre de l'origine, des longueurs OA et OA′ égales à a, sur l'axe des y deux longueurs OB et OB′ égales à b, sur l'axe des z deux longueurs OC et OC′ égales à c (fig. 247). Par les points A et A′, B et B′, C et C′, imaginons des plans respectivement parallèles aux plans YOZ, ZOX, XOY, la surface sera entièrement comprise dans le parallélipipède rectangle ainsi formé. On a donné à cette surface le nom d'*ellipsoïde*.

495—L'origine est un *centre* de l'ellipsoïde. Les plans coordonnés, qui sont les trois *plans principaux* de l'ellipsoïde, coupent la surface suivant trois ellipses ABA′, BCB′, CAC′, que l'on appelle *sections principales* de l'ellipsoïde.

Si l'on coupe la surface par un plan parallèle au plan YOZ, on obtient pour section l'ellipse

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2},$$

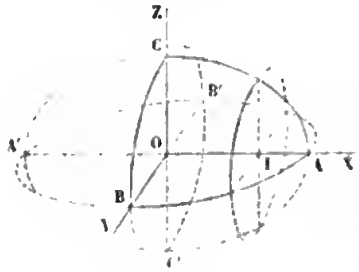


Fig. 247.

dont le centre I est sur l'axe des x. Les points de la courbe étant deux à deux symétriques par rapport au centre I, les points de la surface sont symétriques deux à deux par rapport à la droite OX, qui est ainsi un *axe* de la surface. A mesure que le plan sécant s'éloigne du plan principal YOZ, c'est-à-dire quand x varie de 0 à a, l'ellipse d'intersection reste toujours semblable à l'ellipse CBC', mais diminue jusqu'à se réduire à un point. Il en est de même des sections parallèles à chacun des deux autres plans principaux. Ainsi l'ellipsoïde admet trois axes qui sont les intersections des plans principaux deux à deux. Les extrémités des axes sont les *sommets* de l'ellipsoïde. Si l'on suppose $a>b>c$, $2a$ sera l'axe majeur, $2b$ l'axe moyen, $2c$ l'axe mineur.

496—Il est clair qu'un plan quelconque coupe l'ellipsoïde suivant une courbe fermée; cette courbe du second degré est une ellipse. Coupons la surface par un plan quelconque mené par le grand axe AA' (fig. 248); à cause de la symétrie, l'ellipse d'intersection admettra pour axes, d'une part la droite AA', d'autre part le diamètre DD', suivant lequel le plan sécant coupe l'ellipse principale CBC'B'; ce sera donc une ellipse ayant AA' pour grand axe et DD' pour petit axe. Il en résulte que le demi grand axe OA est le plus grand rayon de l'ellipsoïde.

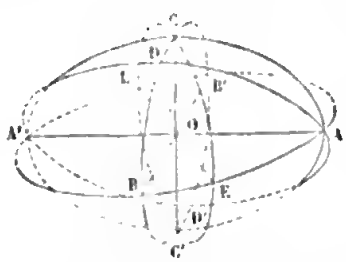


Fig. 248.

De même, un plan quelconque mené par le petit axe CC' coupera la surface suivant une ellipse, ayant pour petit axe CC'

et pour grand axe le diamètre EE′, intersection de l'ellipse principale ABA′ et du plan sécant. Il en résulte que le demi petit axe OC est le plus petit rayon de l'ellipsoïde.

De même encore, un plan mené par l'axe moyen BB′ coupera la surface suivant une ellipse ayant pour axes la droite BB′ et l'un des diamètres de l'ellipse principale ACA′; mais ici ce second axe sera tantôt plus grand que BB′, tantôt plus petit; il peut même devenir égal à BB′, et dans ce cas la section sera un cercle.

PLANS DIAMÉTRAUX.

497—Considérons une série de cordes parallèles à la droite

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma};$$

le plan diamétral correspondant (nº 471) a pour équation

$$(2)\quad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=0.$$

Réciproquement, tout plan passant par le centre est un plan diamétral; soit le plan

$$Ax+By+Cz=0;$$

ce plan coïncidera avec le plan diamétral précédent, si l'on a

$$(3)\quad \frac{\alpha}{a^2A}=\frac{\beta}{b^2B}=\frac{\gamma}{c^2C}.$$

Telles sont les relations qui existent entre la direction des cordes et celle du plan diamétral conjugué. Il est évident que le plan diamétral coupe la surface suivant une courbe fermée du second degré et par conséquent suivant une ellipse. Chaque point de cette ellipse est le point de contact d'une droite parallèle aux cordes et tangente à la surface; ces tangentes forment un cylindre tangent à l'ellipsoïde tout le long de cette ellipse et l'enveloppant.

DIAMÈTRES.

498—Nous savons que les sections faites par des plans

parallèles dans l'ellipsoïde sont des ellipses homothétiques (n° 467); cherchons le lieu des centres de ces ellipses. Soit

$$Ax+By+Cz=l,$$

l'équation d'un plan, dans laquelle A, B, C sont des coefficients constants, l un paramètre variable. Si l'on élimine z entre cette équation et celle de l'ellipsoïde, on a l'équation de la projection de la courbe d'intersection sur le plan XOY,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(Ax+By-l)^2}{c^2C^2}=1.$$

Le centre de cette courbe se projette au centre de la courbe projection; ce dernier point est donné par les deux équations

$$\frac{x}{a^2}+\frac{A(Ax+By-l)}{c^2C^2}=0,$$

$$\frac{y}{b^2}+\frac{B(Ax+By-l)}{c^2C^2}=0;$$

en y joignant l'équation du plan sécant, on a le centre de la courbe dans l'espace. Si entre ces trois équations on élimine le paramètre variable l, on obtient le lieu des centres

$$\frac{x}{a^2A}=\frac{y}{b^2B}=\frac{z}{c^2C}.$$

C'est une droite passant par le centre. On a donné à cette droite, lieu des centres des sections parallèles, le nom de *diamètre*.

La direction du diamètre est conjuguée du plan diamétral parallèle aux plans sécants; car les coefficients de la droite et du plan vérifient les relations (3).

Réciproquement, toute droite menée par le centre est un diamètre; car si l'on mène le plan diamétral conjugué de cette direction, et des plans sécants parallèles, le lieu des centres coïncidera avec la droite donnée.

PLAN TANGENT.

499—Le plan tangent au point (x, y, z) a pour équation

$$(X-x)\frac{x}{a^2}+\left(Y-y\right)\frac{y}{b^2}+\left(Z-z\right)\frac{z}{c^2}=0,$$

ou plus simplement

$$(4)\ \frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$

Le plan tangent est parallèle au plan diamétral conjugué du diamètre, qui va du centre au point de contact. Car, ce diamètre ayant pour équation

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z},$$

ses coefficients et ceux du plan tangent vérifient les relations (3).

DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

500—On dit que trois diamètres forment un système de *diamètres conjugués*, quand chacun d'eux est conjugué du plan des deux autres. Nous avons déjà reconnu l'existence de pareils systèmes de diamètres (n° 479); menons arbitrairement un premier diamètre OD et considérons le plan diamétral conjugué; ce plan coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse; prenons deux diamètres conjugués quelconques OE, OF de cette ellipse; les trois diamètres OD, OE, OF formeront un système de diamètres conjugués; car si l'on prend pour axes des coordonnées les trois droites OD, OE, OF et que l'on appelle a', b', c' les longueurs des trois rayons OD, OE, OF, d'après le raisonnement qui a été fait précédemment, l'équation de l'ellipsoïde se mettra sous la forme

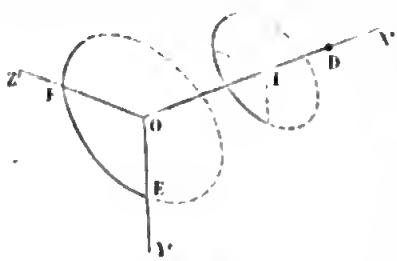


Fig. 249.

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1.$$

On en conclut que les trois axes des coordonnées forment un système de diamètres conjugués, ou, ce qui revient au même, que les trois plans des coordonnées forment un système de plans diamétraux conjugués.

On voit bien, à l'aide de cette équation, comment varient

les sections parallèles; si l'on coupe la surface par un plan parallèle au plan diamétral Y'OZ', on a une ellipse

$$\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1-\frac{x'^2}{a'^2}$$

homothétique à l'ellipse diamétrale EOF et ayant son centre au point I sur le diamètre OD; cette ellipse va en diminuant à mesure que le plan sécant s'éloigne du plan diamétral; elle se réduit au point D, quand le plan sécant passe par ce point et alors le plan est tangent à la surface; au delà le plan ne rencontre plus la surface; en d'autres termes, il la coupe suivant une ellipse imaginaire dont le centre est réel et situé sur le prolongement de OD. Il en est de même de l'autre côté.

501—Cherchons maintenant les relations qui existent entre les directions des trois diamètres conjugués OD, OE, OF. Désignons par α, β, γ les coefficients du premier diamètre, par α', β', γ' ceux du second, par α'', β'', γ'' ceux du troisième. Le plan conjugué du diamètre OD a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=0;$$

ce plan contenant le diamètre OE, on a la relation

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}=0.$$

On obtient ainsi les trois relations

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}=0,\\&\frac{\alpha'\alpha''}{a^2}+\frac{\beta'\beta''}{b^2}+\frac{\gamma'\gamma''}{c^2}=0,\\&\frac{\alpha''\alpha}{a^2}+\frac{\beta''\beta}{b^2}+\frac{\gamma''\gamma}{c^2}=0,\end{aligned}\right.$$

qui expriment que chaque diamètre est conjugué du plan des deux autres.

La première de ces relations signifie que les deux diamètres OD, OE sont conjugués entre eux.

502—Considérons deux systèmes de diamètres conjugués ODEF, OD'E'F' (fig. 250). Soit OG le diamètre suivant lequel se

coupent les deux plans EOF, E'OF', OH et OH' les diamètres conjugués de OG dans ces deux plans. Si, conservant OD, on remplace les diamètres conjugués OE, OF par deux autres diamètres conjugués OG, OH de la même ellipse, la somme des carrés ne change pas; de même, si, conservant OD', on remplace les deux diamètres conjugués OE', OF' par deux autres diamètres conjugués OG, OH' de la même ellipse, la somme des carrés ne change pas. On a alors deux systèmes de diamètres conjugués OGHD, OGH'D', qui ont un diamètre commun OG; les deux autres, étant situés dans le plan diamétral conjugué de OG, appartiennent à la même ellipse. Donc la somme des carrés est la même. Ainsi *la somme des carrés de trois diamètres conjugués est constante et par conséquent égale à la somme des carrés des axes.*

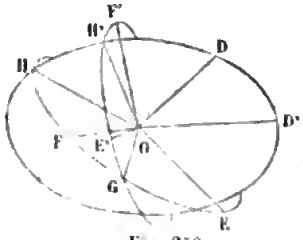


Fig. 250.

On démontre de la même manière que *le volume du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués est constant;* lorsqu'on remplace le système ODEF par le système ODGH, le volume ne change pas; car les deux parallélipipèdes ont des bases équivalentes, les parallélogrammes EOF, GOH, et même hauteur, la perpendiculaire abaissée du point D sur le plan des bases.

SECTIONS CIRCULAIRES.

503—Parmi les sections planes de l'ellipsoïde, il importe d'examiner surtout les sections circulaires. Supposons qu'un plan diamétral coupe l'ellipsoïde suivant un cercle; soit OD le diamètre conjugué; si, dans le plan du cercle, on prend la projection OE de OD et un diamètre OF perpendiculaire à OE, on aura un système de trois diamètres conjugués; or, le diamètre OF est perpendiculaire au plan diamétral conjugué DOE; donc ce plan est un plan principal et OF l'un des axes de la surface. Ainsi les plans

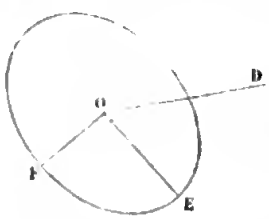


Fig. 251.

diamétraux qui coupent l'ellipsoïde suivant des cercles, passent par l'un des axes de la surface.

Cet axe est l'axe moyen BB′ de l'ellipsoïde; car, nous avons vu (nº 496) que, lorsque le plan sécant passe par le grand axe AA′, ou par le petit axe CC′, les deux axes de l'ellipsoïde diffèrent nécessairement.

Lorsque le plan sécant passe par l'axe moyen BB′, les deux axes de l'ellipse d'intersection sont l'axe BB′ et le diamètre DD′ suivant lequel le plan sécant coupe l'ellipse principale ACA′. La longueur de ce diamètre DD′ variant de CC′ à AA′, pourra être égale à BB′, et alors la section sera un cercle. Du point O comme centre, avec un rayon égal à b et dans le plan principal ACA′ décrivons un arc de cercle qui coupera l'ellipse principale en D et E; menons les diamètres OD et OE; les deux plans diamétraux BOD, BOE couperont l'ellipsoïde suivant des cercles. On conclut de là que *l'ellipsoïde à trois axes inégaux admet deux séries de sections circulaires.*

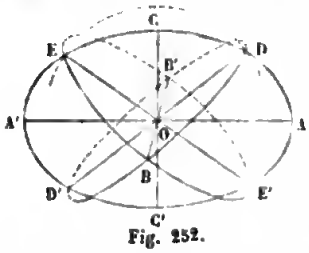


Fig. 252.

Quand l'ellipsoïde est de révolution, les deux plans BOD, BOE se confondent avec le plan principal perpendiculaire à l'axe de rotation, c'est-à-dire avec l'équateur de la surface. On n'a plus alors qu'une série de sections circulaires.

CHAPITRE IV.

Des Hyperboloïdes.

Considérons maintenant le cas où les trois racines de l'équation en S n'ont pas le même signe; supposons, par exemple, que les deux racines S et S′ soient positives, et la troisième négative.

CÔNE.

504—Si le terme constant H est nul, l'équation

$$Sx^2+S'y^2+S''z^2=0,$$

étant homogène par rapport à x, y, z, ne peut représenter qu'un système de droites ou un point. Posons

$$tang\,\alpha = \sqrt{\frac{-S''}{S}}, \qquad tang\,\beta = \sqrt{\frac{-S''}{S'}},$$

l'équation s'écrira

$$(1)\quad \frac{x^2}{tang^2\alpha} + \frac{y^2}{tang^2\beta} - z^2 = 0.$$

Le plan principal XOZ coupe la surface suivant deux droites OA, OA′ faisant avec OZ un angle égal à α; le plan principal YOZ suivant deux droites OB, OB′ faisant avec OZ un angle égal à β. Le plan principal XOY coupe la surface suivant un seul point O. Tout plan parallèle au plan XOY donne une ellipse ABA′ ayant pour équation

$$\frac{x^2}{tang^2\alpha} + \frac{y^2}{tang^2\beta} = z^2;$$

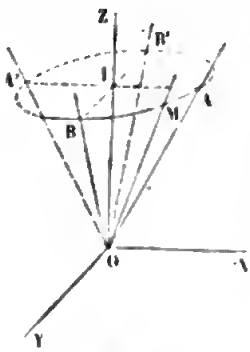


Fig. 253.

cette ellipse qui a son centre I sur l'axe OZ, augmente indéfiniment à mesure que le plan sécant s'éloigne du sommet. Ainsi le lieu est un cône que l'on peut considérer comme engendré par une droite OM, qui tourne autour du sommet en glissant sur l'ellipse ABA′. En supposant S plus petit que S′ et, par conséquent, α plus grand que β, on voit que l'angle que fait la génératrice OM avec l'axe OZ varie de α à β. Le cône est formé de deux nappes égales situées de part et d'autre du sommet. L'équation des cônes du second degré se ramenant à la forme (1), il en résulte que tout cône du second degré peut être considéré comme un cône droit à base elliptique.

Les plans perpendiculaires à chacun des deux autres axes OX et OY coupent le cône suivant des hyperboles ayant leurs centres sur ces axes. Les trois axes des coordonnées sont des axes du cône; l'un OZ est situé à l'intérieur du cône, les deux autres à l'extérieur. Par rapport à chacun de ceux-ci, un point quelconque du cône a son symétrique sur l'autre nappe;

par rapport au premier, un point a son symétrique sur la même nappe.

HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

505—Supposons que le terme constant H ait une valeur positive et posons

$$a=\sqrt{\frac{H}{S}},\quad b=\sqrt{\frac{H}{S'}},\quad c=\sqrt{\frac{H}{-S''}},$$

l'équation de la surface prendra la forme

$$(2)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Le plan principal XOY coupe la surface suivant une ellipse ABA'; le plan principal XOZ suivant une hyperbole dont A'A est l'axe transverse et OZ l'axe imaginaire, le plan principal YOZ coupe de même la surface suivant une hyperbole dont BB' est l'axe transverse et OZ l'axe imaginaire. Si l'on coupe la surface par des plans parallèles au plan XOY, on a des ellipses homothétiques

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2},$$

qui ont leurs centres sur OZ. et qui vont en augmentant indéfiniment à mesure que le plan sécant s'éloigne du plan principal d'un côté ou de l'autre; l'ellipse minimum ABA' déterminée par le plan principal s'appelle *ellipse de gorge*. On voit par là que la surface est formée d'une seule nappe continue qui s'étend indéfiniment en s'ouvrant de plus en plus de chaque côté du plan de l'ellipse de gorge. On a donné à cette surface le nom d'*hyperboloïde à une nappe*.

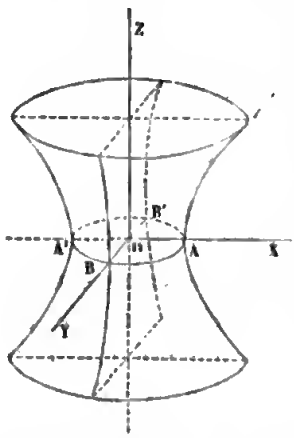


Fig. 254.

Les plans parallèles au plan XOZ coupent la surface suivant des hyperboles homothétiques ayant leurs centres sur OY; de même les plans parallèles au plan YOZ coupent la surface suivant des hyperboles homothétiques ayant leurs centres sur

OX. Il résulte de là que l'hyperboloïde à une nappe admet trois axes, deux réels AA′ et BB′, un imaginaire OZ. Les deux axes réels sont les axes de l'ellipse de gorge; l'axe imaginaire OZ est situé à l'intérieur de la surface.

Lorsque les deux axes réels deviennent égaux, les sections parallèles au plan XOY étant des cercles, la surface est de révolution; elle est engendrée par une hyperbole tournant autour de son axe imaginaire OZ.

HYPERBOLOÏDE A DEUX NAPPES.

506—Examinons enfin le cas où le terme constant H a une valeur négative ; si l'on pose

$$a=\sqrt{\frac{-H}{S}},\quad b=\sqrt{\frac{-H}{S'}},\quad c=\sqrt{\frac{-H}{-S''}},$$

l'équation prend la forme

$$(3)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

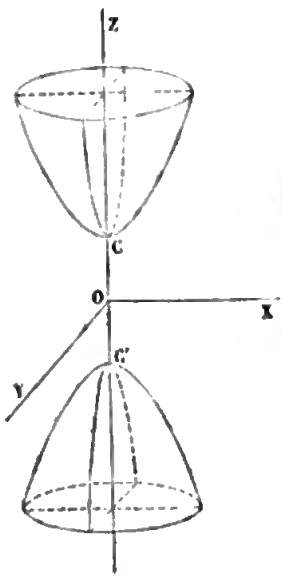


Fig. 255.

Les deux plans principaux XOZ, YOZ coupent la surface suivant des hyperboles dont l'axe transverse CC′ a une longueur égale à $2c$ et est dirigé suivant l'axe OZ. Le plan principal XOY ne rencontre pas la surface. La section faite par un plan parallèle au plan XOY est une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1;$$

mais cette ellipse n'est réelle que si la valeur absolue de z est plus grande que c; si donc par chacun des points C et C′ on mène un plan parallèle au plan XOY, il n'y aura aucun point du lieu situé entre ces deux plans. Si le plan sécant s'éloigne à partir du point C, l'ellipse, qui est d'abord réduite à un point, augmente indéfiniment; et de même de l'autre côté, à partir du point C′. On voit par là que la surface se compose de deux nappes infinies et séparées

l'une de l'autre ; on lui a donné le nom d'*hyperboloïde à deux nappes*. La surface a trois axes, un réel CC′, deux imaginaires OX et OY.

Quand les deux axes imaginaires $2a$ et $2b$ deviennent égaux, la surface est de révolution ; elle est engendrée par une hyperbole tournant autour de son axe transverse CC′.

CÔNE ASYMPTOTE.

507—Considérons les deux hyperboloïdes représentés par les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1,$$

et que nous nommerons hyperboloïdes conjugués ; tout rayon réel de l'un est imaginaire dans l'autre, et a même longueur. Un plan sécant mené par l'axe OZ coupe ces deux surfaces suivant des hyperboles conjuguées ; l'hyperbole située sur l'hyperboloïde à deux nappes a pour axe transverse CC′ ; celle qui est située sur l'hyperboloïde à une nappe a pour axe transverse le diamètre suivant lequel le plan sécant coupe l'ellipse de gorge. Soit $y=mx$ l'équation du plan sécant ; l'équation

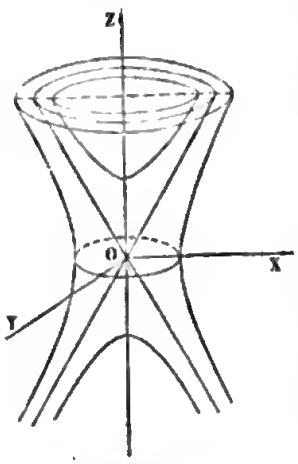


Fig. 256.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1,$$

provenant de l'élimination de y donne les projections des courbes d'intersection sur le plan XOZ ; ces courbes projections sont des hyperboles ayant pour asymptotes communes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Si à cette équation on joint celle du plan sécant $y=mx$, on aura les asymptotes des hyperboles dans l'espace. Imaginons actuellement que le plan sécant tourne autour de l'axe OZ ; ces asymptotes décriront un cône que nous appellerons *cône asymptote* des hyperboloïdes ; on obtient son équation en éli-

minant le paramètre variable m entre les deux équations précédentes, ce qui donne

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

508—Plus généralement le cône asymptote est le lieu des asymptotes de toutes les hyperboles déterminées dans les deux surfaces par des plans passant par le centre. En effet, soit $z=mx+ny$ l'équation du plan sécant, les courbes d'intersection ont pour projections sur le plan XOY

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(mx+ny)^2}{c^2}=\pm 1;$$

les asymptotes sont données par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(mx+ny)^2}{c^2}=0,$$

jointe à celle du plan sécant. Il arrive ici que l'on peut éliminer à la fois les deux paramètres variables m et n entre ces équations, ce qui reproduit le cône asymptote

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Les deux hyperboloïdes conjugués ont même cône asymptote. L'hyperboloïde à deux nappes est situé à l'intérieur du cône, l'hyperboloïde à une nappe à l'extérieur.

SECTIONS PLANES.

509—Considérons les surfaces représentées par l'équation

$$(4)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\lambda,$$

dans laquelle λ est un paramètre arbitraire. On a les deux hyperboloïdes ou le cône asymptote, quand on attribue au paramètre λ les valeurs ± 1 ou la valeur 0. Si l'on coupe ces surfaces par un même plan

$$Ax+By+Cz=l,$$

les projections des courbes d'intersection sur le plan XOY ont pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(l-Ax-By)^2}{c^2C^2}=\lambda;$$

le paramètre λ n'entrant que dans le terme constant, il en résulte que les courbes projections, et par suite les courbes dans l'espace, sont homothétiques; car ce sont les intersections de cylindres homothétiques par des plans parallèles (n° 466); elles sont en outre concentriques, si elles ont un centre; quand ce sont des paraboles, elles ont même paramètre, et par conséquent sont égales.

510—Il résulte de là que pour reconnaître l'espèce de la section d'un hyperboloïde par un plan, il suffit d'étudier la section du cône asymptote par le même plan. On sait d'ailleurs que les sections parallèles sont homothétiques.

Par le centre, menons un plan parallèle au plan sécant; il y a trois cas à distinguer. 1° Si le plan mené par le centre ne coupe le cône qu'en un seul point, les deux nappes du cône sont situées, l'une d'un côté de ce plan, l'autre de l'autre; il est clair que tout plan parallèle coupera toutes les droites d'une même nappe et par conséquent déterminera sur le cône une courbe fermée qui sera une ellipse; les sections faites par ce même plan dans les hyperboloïdes seront aussi des ellipses. 2° Si le plan mené par le centre coupe le cône suivant deux droites, il partage chacune des nappes en deux parties situées de part et d'autre du plan; tout plan parallèle rencontrera la partie de chacune des nappes qui est du même côté que ce plan, et par conséquent coupera le cône suivant deux branches séparées et s'étendant indéfiniment; car si une génératrice du cône se rapproche de l'une des génératrices déterminées par le plan mené par le centre, elle devient parallèle au plan sécant, et le point d'intersection s'éloigne à l'infini; la courbe est donc une hyperbole. Cette hyperbole aura ses asymptotes parallèles aux droites déterminées par le plan passant par le centre. 3° Enfin, si le plan mené par le centre est tangent au cône asymptote, l'une des nappes du cône sera située tout entière d'un côté du plan, l'autre nappe de l'autre côté, excepté l'arête de contact, qui est dans le plan; un plan parallèle ne rencontrera que la nappe qui est du même côté que ce plan et la cou-

pera suivant une branche infinie ; la courbe sera une parabole.

Nous examinerons plus tard en détail les diverses variétés que présentent ces courbes, et leur déformation quand on fait mouvoir le plan sécant.

PLANS DIAMÉTRAUX.

511—Considérons les surfaces représentées par l'équation

$$(4)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\lambda,$$

dans laquelle λ est un paramètre arbitraire, et qui donne le cône asymptote ou les deux hyperboloïdes, quand on attribue au paramètre λ la valeur 0 ou les valeurs ± 1.

Le plan diamétral conjugué de la droite

$$(5)\quad \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$$

a pour équation

$$(6)\quad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-\frac{\gamma z}{c^2}=0.$$

Ce plan est le même dans les deux hyperboloïdes et dans le cône asymptote. On pourrait d'ailleurs le reconnaître *à priori*. En effet, considérons une sécante qui rencontre le cône en deux points ; le plan mené par cette sécante et le centre coupe le cône suivant les asymptotes des hyperboles déterminées par ce plan dans les hyperboloïdes ; les portions de cette sécante comprises entre les hyperboles et les asymptotes étant égales, il en résulte que les cordes ont même point milieu.

512—L'espèce de la section déterminée par le plan diamétral dépend de la direction des cordes. Par le centre, menons une parallèle aux cordes ; si cette droite est située à l'intérieur du cône asymptote, il est évident que chaque sécante rencontre les deux nappes du cône et, par conséquent, le point milieu est entre les deux nappes ; le plan diamétral, ayant tous ses points entre les deux nappes, coupe le cône suivant un point. L'hyperboloïde à une nappe, étant situé à l'extérieur du cône asymptote, sera coupé par le plan diamétral suivant une ellipse réelle ; cette ellipse est la courbe

de contact d'un cylindre ayant ses génératrices parallèles aux sécantes et circonscrit à l'hyperboloïde; le cylindre circonscrit est situé à l'intérieur de l'hyperboloïde. L'hyperboloïde à deux nappes étant situé, au contraire, à l'intérieur du cône asymptote, le plan diamétral ne rencontre pas la surface; aucune des sécantes ne devient tangente, et il n'existe pas de cylindre circonscrit dans cette direction.

Si la droite menée par le centre est située à l'extérieur du cône asymptote, une parallèle percera une même nappe en deux points et, par conséquent, le point milieu sera situé à l'intérieur du cône; le plan diamétral, pénétrant à l'intérieur du cône, coupera ce cône suivant deux droites, et, par conséquent, les hyperboloïdes suivant des hyperboles conjuguées. Chacune de ces hyperboles sera la courbe de contact d'un cylindre circonscrit.

513—Il est un cas où il n'y a plus à proprement parler de plan diamétral; c'est lorsque la droite menée par le centre appartient au cône asymptote; dans ce cas, toute parallèle ne rencontre la surface qu'en un point et le point milieu est à l'infini. Cependant l'équation (6) représente encore un plan passant par le centre; c'est la position limite vers laquelle tend le plan diamétral, quand la droite (5) se rapproche de plus en plus du cône. Le plan tangent au cône a pour équation

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} - \frac{zZ}{c^2} = 0;$$

si le point de contact appartient à la droite (5), cette équation devient

$$\frac{\alpha X}{a^2} + \frac{\beta Y}{b^2} - \frac{\gamma Z}{c^2} = 0;$$

c'est l'équation (6); ainsi quand les sécantes deviennent parallèles à une arête du cône asymptote, le plan diamétral coïncide avec le plan tangent au cône suivant cette arête.

DIAMÈTRES.

514—Les sections faites dans les hyperboloïdes et dans le cône asymptote par un même plan étant concentriques, le lieu

des centres des sections parallèles est le même dans les hyperboloïdes et dans le cône; or, il est évident, à cause de la similitude, que dans le cône ce lieu est une droite passant par le sommet du cône.

Lorsque les sections sont des ellipses, le lieu des centres, ou le diamètre, étant situé à l'intérieur du cône, rencontre l'hyperboloïde à deux nappes, mais ne rencontre pas l'hyperboloïde à une nappe. Lorsque les sections sont des hyperboles, le diamètre étant à l'extérieur du cône, rencontre, au contraire, l'hyperboloïde à une nappe et ne rencontre pas l'hyperboloïde à deux nappes.

On obtient un système de trois diamètres conjugués de l'hyperboloïde à une nappe en prenant un diamètre quelconque, et, dans le plan diamétral conjugué, deux diamètres conjugués de la section. Il est aisé de voir que, de ces trois diamètres conjugués, deux OD, OE sont toujours réels, un OF imaginaire. En effet, si le premier diamètre est réel, le plan diamétral, comme nous l'avons dit (nº 512), coupe la surface suivant une hyperbole, dans laquelle un second diamètre sera réel, le troisième imaginaire. Si, au contraire, le premier diamètre est imaginaire, le plan diamétral conjugué coupe la surface suivant une ellipse réelle, dans laquelle deux diamètres conjugués sont réels. L'équation de la surface, rapportée à ces diamètres conjugués, prend la forme

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}-\frac{z'^2}{c'^2}=1.$$

L'hyperboloïde conjugué admettant le même diamètre pour la même série de plans sécants, les deux surfaces ont les mêmes systèmes de diamètres conjugués; seulement un diamètre, réel dans l'une, est imaginaire dans l'autre, de sorte que, dans l'hyperboloïde à deux nappes, de trois diamètres conjugués, deux sont toujours imaginaires, et un réel.

Pour former un système de diamètres conjugués, nous avons pris l'un d'eux arbitrairement; il faut toutefois que cette droite n'appartienne pas au cône asymptote.

515—Il nous est facile maintenant de compléter l'étude des sections planes des hyperboloïdes. Imaginons la surface rapportée à un système de plans diamétraux conjugués dont l'un soit parallèle au plan sécant; l'équation prendra la forme

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=\pm 1.$$

Considérons d'abord l'hyperboloïde à une nappe. Si le plan sécant est parallèle au plan DOE, la section est une ellipse

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1+\frac{z^2}{c'^2},$$

toujours réelle, dont le centre est sur le diamètre imaginaire OF, et qui augmente indéfiniment à mesure que le plan sécant s'éloigne du plan diamétral, d'un côté ou de l'autre. Si le plan sécant est parallèle au plan EOF, la section est une hyperbole

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1-\frac{x^2}{a'^2},$$

dont le centre est situé sur le diamètre réel OD, et dont les asymptotes sont parallèles à celles de l'hyperbole déterminée par le plan diamétral $x=0$; cette hyperbole admet aussi deux diamètres conjugués respectivement parallèles à OE et à OF. Quand x varie de 0 à a', le diamètre réel est parallèle à OE, et diminue de b' à 0; pour $x=a'$, l'hyperbole se réduit à deux droites passant au point D, et le plan devient tangent à la surface au point D; quand x croît ensuite à partir de a', le diamètre réel est au contraire parallèle à OF et augmente de zéro à l'infini; l'hyperbole a changé de disposition; d'abord située dans les angles des asymptotes qui comprennent le diamètre OE, elle a passé dans les angles supplémentaires. La transition s'opère par le système de deux droites.

516—Considérons maintenant l'hyperboloïde à deux nappes. Les sections parallèles au plan DOE sont des ellipses

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=\frac{z^2}{c'^2}-1,$$

dont les centres sont situés sur le diamètre réel OF; quand z varie de 0 à c', l'ellipse est imaginaire; pour $z=c'$, elle se

réduit à un point; quand z croît à partir de c', l'ellipse devient réelle et augmente indéfiniment. Les sections parallèles au plan EOF sont des hyperboles

$$\frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = -1 - \frac{x^2}{a'^2},$$

dont le diamètre réel est toujours parallèle à OF et augmente indéfiniment. L'hyperbole a toujours la même disposition.

517—Nous n'avons parlé jusqu'à présent que des sections elliptiques ou hyperboliques. La transformation précédente ne peut plus être effectuée, lorsque le plan sécant est parallèle à un plan tangent au cône asymptote; dans ce cas, la section est une parabole, égale à celle que détermine le plan sécant sur le cône asymptote, et il est évident, d'après la similitude, que le paramètre de la parabole tracée sur le cône par le plan sécant augmente proportionnellement à la distance du plan sécant au centre.

Pour étudier la position de la courbe, nous nous servirons d'une autre forme extrêmement simple, sous laquelle on peut mettre l'équation de l'hyperboloïde. Prenons pour axe des y et des z deux arêtes quelconques du cône asymptote et pour axe des x le diamètre conjugué du plan YOZ, l'équation des hyperboloïdes se réduira à la forme

$$Ax^2 + Byz = \pm 1.$$

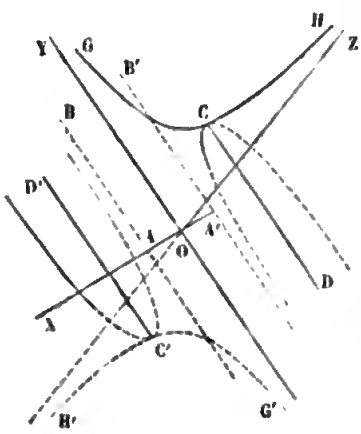


Fig. 257.

Car elle ne doit pas contenir de terme du premier degré, et lorsqu'on y fait $x=0$, on a une hyperbole rapportée à ses asymptotes. On peut toujours supposer que les deux constantes A et B sont positives. La surface est un hyperboloïde à une ou à deux nappes suivant que le second membre est positif ou négatif; car le plan $z=0$ coupe la surface dans le premier cas et ne la rencontre pas dans le second cas. Les sections des deux sur-

faces par le plan YOZ sont des hyperboles conjuguées. Le cône asymptote a pour équation

$$Ax^2 + Byz = 0.$$

Les plans XOY et XOZ sont tangents à ce cône suivant les arêtes OY et OZ. Si la surface est un hyperboloïde à une nappe, elle est coupée par le plan $z=0$ suivant deux droites AB, A'B' parallèles à OY (fig. 257); tout plan parallèle $z=\gamma$ coupe la surface suivant une parabole $Ax^2+B\gamma y=1$, qui a pour diamètre la trace CD du plan sécant sur le plan YOZ. L'extrémité C de ce diamètre appartient à l'hyperbole GH, G'H', suivant laquelle le plan YOZ coupe la surface. La direction du diamètre change avec le signe de γ. Les sections faites dans l'hyperboloïde à une nappe par les plans $z=\pm\gamma$ ont la disposition indiquée sur la figure 257. Quand les deux plans sécants se rapprochent du plan XOY, les points C et C' s'éloignent indéfiniment sur les branches d'hyperbole CG, C'G', et les deux paraboles tendent vers le système des deux droites parallèles AB, A'B'.

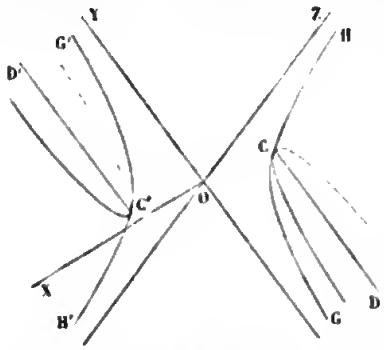


Fig. 258.

Si la surface est un hyperboloïde à deux nappes, le plan $z=0$ ne rencontre pas la surface, et les deux paraboles données par les plans $z=\pm\gamma$ ont la disposition indiquée par la figure 258. Quand γ tend vers zéro, les deux paraboles s'éloignent à l'infini.

SECTIONS CIRCULAIRES.

518—Considérons d'abord l'hyperboloïde à une nappe. D'après les raisonnements qui ont été faits sur l'ellipsoïde, on reconnaît qu'un plan diamétral, qui coupe l'hyperboloïde suivant un cercle, doit passer par l'un des axes de la surface; or tout plan mené par l'axe imaginaire OZ coupe la surface suivant une hyperbole; le plan passera donc par l'un des axes réels.

Lorsqu'un plan BOD, mené par l'axe OB, coupe la surface suivant une ellipse, l'un des axes de l'ellipse est OB, l'autre la trace OD du plan sécant sur le plan XOZ; mais la longueur de OD est plus grande que OA; pour que OD soit égal à OB, il est nécessaire que OB soit plus grand que OA. Ainsi, le plan sécant passera par le plus grand axe de l'ellipse de gorge. Du point O comme centre, avec OB pour rayon, décrivons dans le plan XOZ un cercle qui coupe l'hyperbole en deux points D, D′; les deux plans BOD, BOD′ couperont l'hyperboloïde suivant des cercles.

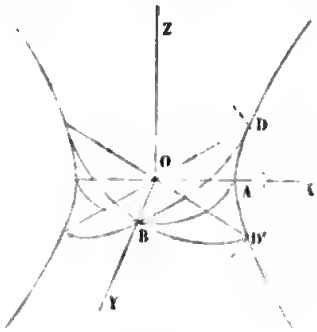


Fig. 259.

Deux séries de plans parallèles à ces deux plans couperont suivant des cercles l'hyperboloïde proposé, le cône asymptote et l'hyperboloïde conjugué. Lorsque la surface est de révolution, les deux séries de sections circulaires se confondent et deviennent perpendiculaires à l'axe de rotation.

SECTIONS ANTIPARALLÈLES DU CÔNE CIRCULAIRE OBLIQUE.

519—Il résulte de ce qui précède que tout cône du second degré peut être considéré comme un cône droit ou oblique à base circulaire. Lorsque le cône est oblique, il existe une seconde série de sections circulaires qu'il est facile de trouver géométriquement. Soit S le sommet d'un cône oblique ayant pour base le cercle AB; par la droite SO qui va du sommet au centre O de la base, menons un plan ASB perpendiculaire au plan de la base; tout plan parallèle à la base coupant le cône suivant un cercle qui a pour diamètre la trace du plan sécant sur le plan ASB, il en résulte que ce plan ASB divise le cône en deux parties symétriques; c'est donc un plan principal et

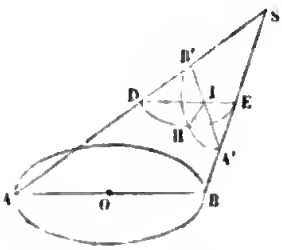


Fig. 260.

l'ensemble des deux droites SA et SB est la section principale correspondante. La bissectrice de l'angle ASB est l'axe intérieur du cône, la bissectrice de l'angle supplémentaire est un second axe, une perpendiculaire menée par le sommet S au plan principal ASB est le troisième axe. On connaît ainsi les trois axes et les trois plans principaux du cône. Dans le plan principal ASB menons la ligne B'A' antiparallèle à AB, c'est-à-dire telle que l'angle SA'B' soit égal à SAB ; puis, par la droite A'B', faisons passer un plan perpendiculaire au plan principal ASB; la section du cône par ce plan sera un cercle B'HA'. En effet, par un point quelconque H de la courbe B'HA' menons un plan parallèle à la base ; ce plan coupe le cône suivant un cercle, et le plan B'HA' suivant une ligne HI perpendiculaire à la section principale. Dans le cercle DHE on a

$$\overline{HI}^2 = DI \times IE.$$

D'autre part, les triangles semblables DIB', EIA' donnent

$$DI \times IE = B'I \times IA';$$

donc

$$\overline{HI}^2 = B'I \times IA',$$

et par conséquent le point H est un point du cercle décrit sur B'A' comme diamètre. Les sections parallèles à B'HA' sont dites antiparallèles à la base.

GÉNÉRATRICES RECTILIGNES DE L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

520—Nous avons vu (n° 410), que lorsqu'une droite a plus de deux points situés sur une surface du second ordre, elle est tout entière située sur la surface. D'après cela, on comprend qu'il est impossible de placer sur un ellipsoïde une portion de droite, si petite qu'elle soit. Car, si cette portion de droite avait seulement trois points communs avec la surface, la droite indéfinie serait située tout entière sur la surface, et il est évident qu'une droite indéfinie ne peut appartenir à une surface limitée comme l'ellipsoïde. Il est impossible aussi de placer une droite sur l'hyperboloïde à deux nappes; nous remarquons d'abord que cette droite ne peut être parallèle au plan de l'ellipse de gorge, puisque toutes les sections parallèles à ce plan sont

des ellipses. La droite irait donc d'une nappe à l'autre, et il y aurait une portion intermédiaire qui n'appartiendrait pas à la surface. La même impossibilité n'existe pas pour l'hyperboloïde à une nappe. Nous avons déjà reconnu, en étudiant les sections planes (n° 515), que, lorsque le plan sécant, mené par un point de la surface, est parallèle au plan diamétral conjugué du diamètre qui passe en ce point, la section se réduit à deux droites; il en résulte que, par tout point de la surface passent deux droites situées tout entières sur la surface. Nous allons étudier les propriétés des droites situées sur l'hyperboloïde à une nappe; mais nous reprendrons d'abord la démonstration du théorème fondamental.

521—Soit M un point quelconque de la surface; prenons pour axe des x le diamètre qui passe en ce point, et pour axes des y et des z deux diamètres conjugués de la section diamétrale correspondante; l'équation de l'hyperboloïde prendra la forme

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

En coupant la surface par le plan $x=a'$, on a deux droites

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0.$$

Ainsi, *par tout point* M *de la surface passent deux droites situées sur la surface.*

522—Dans le même système de coordonnées, le cône asymptote a pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0;$$

si l'on coupe le cône par le plan $x=0$, on a les deux arêtes

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0.$$

Elles sont respectivement parallèles aux deux droites déterminées par le plan $x=a'$ sur la surface de l'hyperboloïde. Ainsi, *les droites situées sur l'hyperboloïde sont respectivement parallèles aux arêtes du cône asymptote.*

Si l'on coupe la surface par le plan $x = -a'$, on a deux droites parallèles aux précédentes; ainsi les droites qui passent par deux points M et M', symétriques par rapport au centre, sont respectivement parallèles entre elles, et aux mêmes arêtes du cône asymptote.

523—Remarque. Nous avons déjà fait observer (nº 474) que les tangentes à toutes les courbes tracées par un même point sur une surface du second degré sont situées dans le même plan; il n'y a d'exception que pour le sommet du cône. Par le point M passent deux droites situées sur la surface; le plan de ces deux droites est le plan tangent. Il en résulte que par le point M il ne passe pas une troisième droite située sur la surface: car, s'il y en avait une troisième, elle serait aussi contenue dans le plan tangent $x = a'$; or, ce plan ne coupe la surface que suivant deux droites.

Nous ferons remarquer aussi que la surface est coupée par le plan tangent; une partie est située d'un côté de ce plan, l'autre partie de l'autre côté.

524—Nous allons faire voir que les droites situées sur l'hyperboloïde peuvent être distinguées en deux séries, dont chacune constitue toute la surface. On opère commodément cette distinction, et l'on se rend bien compte de la position des droites, à l'aide de l'ellipse de gorge.

Puisque par tout point de la surface passent deux droites, il est clair que, par tout point D de l'ellipse de gorge, passent deux droites DG, DH situées sur la surface (fig. 261).

Si, conservant pour axe des z l'axe imaginaire de la surface, on prend pour axe des x le diamètre OD de l'ellipse de gorge, et pour axe des y le diamètre conjugué OE, l'hyperboloïde a pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Le plan $x = a'$, mené par le point D parallèlement au plan

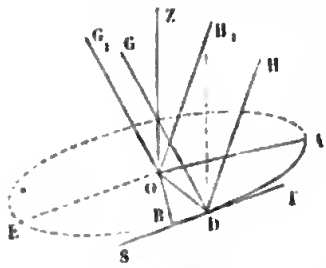


Fig. 261.

ZOE, a pour trace, sur le plan de l'ellipse de gorge, la tangente ST à cette ellipse; ce plan coupe l'hyperboloïde suivant deux droites

$$\frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 0,$$

qui se projettent sur le plan de l'ellipse de gorge suivant la tangente ST. Ainsi, *toute tangente à l'ellipse de gorge est la projection de deux droites situées sur l'hyperboloïde.*

Le cône asymptote a pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

il est coupé par le plan $x=0$ suivant deux droites OG_1, OH_1, qui ont pour équation

$$\frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

et qui sont respectivement parallèles aux deux droites DG, DH situées sur l'hyperboloïde. Les deux axes des coordonnées OE et OZ étant rectangulaires, il résulte de ce qui précède que les deux droites DG, DH font des angles égaux avec le plan de l'ellipse de gorge, ou avec la parallèle à l'axe OZ menée par le point D; si l'on appelle γ ce dernier angle, on a

$$tang\,\gamma = \frac{b'}{c}.$$

525—Imaginons maintenant que le point D parcoure l'ellipse de gorge dans le sens AB; toutes les droites, dont les parties supérieures au plan de l'ellipse de gorge font avec les tangentes prises dans le sens du mouvement des angles aigus, formeront un premier système; toutes celles, dont les parties supérieures font avec cette même tangente des angles obtus, formeront un second système. Ainsi, la droite DG appartient au premier système, la droite DH au second. Il est clair que ces deux systèmes, tels que nous venons de les définir, comprennent toutes les droites situées sur la surface; nous

remarquons d'abord qu'une droite quelconque située sur la surface n'est pas parallèle au plan de l'ellipse de gorge, puisque les sections parallèles à ce plan sont des ellipses; cette droite percera donc le plan en un point D de l'ellipse; or, par le point D, passent seulement deux droites DG, DH, appartenant, l'une au premier système, l'autre au second; la droite considérée coïncidera donc avec l'une de ces deux droites.

Si, en même temps que le point D se meut sur l'ellipse, l'angle γ varie d'après la formule $tang\gamma = \frac{b'}{c}$, la droite DG coïncidera successivement avec toutes les droites du premier système, la droite DH avec toutes celles du second système. Il est visible que chacune d'elles engendre la surface entière de l'hyperboloïde. Ainsi l'hyperboloïde à une nappe est une surface réglée, qui peut être engendrée de deux manières par le mouvement d'une ligne droite. Voilà pourquoi les droites de chaque système ont été appelées les *génératrices rectilignes* de l'hyperboloïde.

Il est bon de se rendre compte de la variation de l'angle γ. Cet angle acquiert sa valeur minimum quand la droite passe par l'un des sommets A du grand axe de l'ellipse de gorge, et sa valeur maximum, quand elle passe par l'un des sommets B du petit axe. Le point D allant de A en B, l'angle γ croît de sa valeur minimum à sa valeur maximum; cet angle décroît ensuite pour croître de nouveau, etc. Lorsque $a=b$, c'est-à-dire lorsque l'ellipse de gorge devient un cercle, l'angle γ est constant, et la surface est engendrée par chacune des deux droites DG, DH tournant autour de l'axe OZ et liée invariablement à cet axe; c'est l'hyperboloïde de révolution à une nappe que nous avons déjà considéré comme exemple des surfaces de révolution (n° 454).

526—Chacune des droites mobiles engendrant la surface entière, il est clair que *les deux droites qui passent par un point quelconque de la surface appartiennent, l'une au premier système de génératrices, l'autre au second système.* On

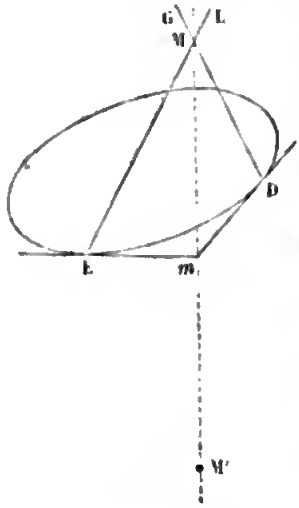


Fig. 262.

le reconnaît d'ailleurs d'une manière très-nette en construisant ces deux droites à l'aide de l'ellipse de gorge. Soit M un point de la surface, que nous supposerons situé au-dessus du plan de l'ellipse de gorge ; ce point se projette sur ce plan en un point *m* extérieur à l'ellipse ; par le point *m* menons des tangentes *m*D, *m*E à l'ellipse ; par le point de contact D de la première tangente, menons la droite DG du premier système, et par le point de contact E de la seconde tangente la droite EL du second système. Les plans projetants GD*m*, LE*m* de ces deux droites se coupent suivant une droite MM′ perpendiculaire au plan de l'ellipse de gorge; cette perpendiculaire élevée par le point *m* perce la surface en deux points ; l'un est le point M situé au-dessus du plan de l'ellipse, l'autre est le point symétrique M′ situé au-dessous. La droite DG, faisant avec D*m* un angle aigu, rencontre la partie supérieure *m*M de la droite MM′, et elle passe au point M, puisque cette partie supérieure ne rencontre la surface qu'en un point. De même la droite EL, faisant avec le prolongement de *m*E un angle obtus, ou avec E*m* un angle aigu, rencontre la partie supérieure *m*M de la même droite au même point M. Ainsi par le point M passent les deux droites MD, ME, qui appartiennent, l'une au premier système, l'autre au second.

527—Nous avons vu que les génératrices rectilignes de la surface se projettent sur le plan de l'ellipse de gorge suivant des tangentes à cette ellipse. La même propriété a lieu par rapport à chacun des plans principaux.

Considérons le plan principal COA mené par l'axe imaginaire OC et le grand axe OA de l'ellipse de gorge (fig. 263) ; on démontrera comme précédemment que la tangente MD_1 au point

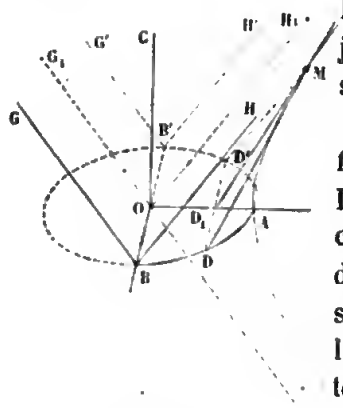


Fig. 263.

M à l'hyperbole principale est la projection de deux droites MD, MD' situées sur la surface.

Quand le point M s'éloigne à l'infini sur l'hyperbole, la tangente D_1M tend vers l'asymptote OH_1; cette asymptote est la projection des deux droites BH, B'H', qui passent par les sommets du petit axe de l'ellipse de gorge. L'autre asymptote OG_1 est la projection des droites BG, B'G', qui passent par ces mêmes points.

528—Les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde jouissent de quelques autres propriétés remarquables que nous allons démontrer. Soient DG, EL deux génératrices de systèmes différents; ces droites se projettent sur le plan de l'ellipse de gorge suivant des tangentes D*m*, E*m* à cette ellipse; en général les deux tangentes se coupent en un point *m* et les deux plans projetants suivant une droite MM' perpendiculaire au plan de l'ellipse. Comme nous l'avons expliqué plus haut, les deux droites DG, EL, appartenant à des systèmes différents, rencontrent la perpendiculaire MM' d'un même côté du plan de l'ellipse de gorge et par conséquent se coupent au point M, où cette perpendiculaire perce la surface. Ainsi en général deux génératrices de systèmes différents se rencontrent.

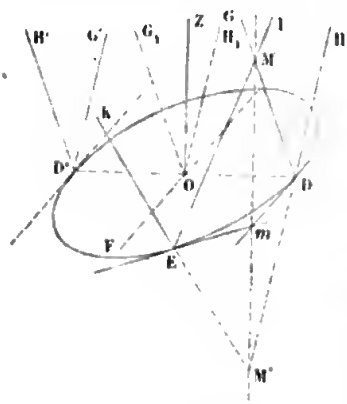


Fig. 264.

Il peut arriver que les projections des deux droites soient parallèles; ceci a lieu, quand les deux droites, telles que DG et D'H', passent par deux points D et D' diamétralement opposés

de l'ellipse de gorge. Dans ce cas, les deux plans projetants sont parallèles; un plan parallèle mené par le centre coupera le cône suivant deux arêtes OG_1, OH_1; il est clair que les deux génératrices DG, D'H' sont parallèles à la même arête OG_1 du cône asymptote, et, par conséquent, sont parallèles entre elles. Il résulte de ce qui précède que *deux génératrices de systèmes différents se rencontrent ou sont parallèles*, c'est-à-dir *sont toujours dans un même plan.*

529—Considérons maintenant deux génératrices DG, EK du même système. Les plans projetants de ces deux droites se coupent suivant la droite MM' perpendiculaire au plan de l'ellipse de gorge. La droite DG, faisant avec sa projection D*m* un angle aigu, rencontre la droite MM' au-dessus du plan de l'ellipse de gorge; la droite EK, faisant avec le prolongement de *m*E un angle aigu, rencontre cette même droite au-dessous du plan; le plan DMM' qui contient la première droite DG et un point M' de la seconde, ne contient pas cette seconde droite; ainsi les deux droites ne sont pas dans un même plan.

Il peut arriver que les projections soient parallèles; soient les deux droites DG, D'G' du même système, passant par deux points diamétralement opposés de l'ellipse de gorge; ces deux droites sont parallèles respectivement aux deux arêtes OG_1, OH_1 du cône asymptote; le plan GDD', qui contient la première et un point D' de la seconde, ne contient pas cette seconde droite; ainsi les deux droites ne sont pas dans un même plan. On conclut de là que *deux génératrices du même système ne sont jamais dans un même plan.*

530—Chaque arête OG_1 du cône asymptote est parallèle à deux génératrices DG, D'H' de systèmes différents; on les obtiendrait de cette manière : soit OF la trace sur le plan de l'ellipse de gorge du plan ZOG_1; menons le diamètre DD' conjugué de OF; les tangentes en D et D' étant parallèles à OF, les plans tangents GDH, G'D'H' en ces points sont parallèles au plan ZOG_1 qui coupe le cône suivant deux arêtes OG_1, OH_1; les deux génératrices DG, D'H' de systèmes différents sont paral-

lèles à OG_1; les deux autres génératrices DH, D'G' sont parallèles à OH_1. Il est impossible qu'une troisième génératrice de l'hyperboloïde soit parallèle à l'arête OG_1; car si trois génératrices de l'hyperboloïde étaient parallèles à une même arête du cône, deux appartiendraient au même système et seraient parallèles entre elles, ce qui ne peut pas être.

Le plan des deux génératrices parallèles DG, D'H' est tangent au cône asymptote suivant l'arête OG_1. Car ce plan contient la droite OG_1, et il ne peut couper le cône suivant une autre droite, puisque la section est du genre parabole.

Remarquons encore que trois génératrices du même système ne peuvent être parallèles à un même plan; car, en menant par le centre des parallèles à ces génératrices, on aurait trois arêtes différentes du cône asymptote situées dans le même plan, ce qui est impossible.

531—Ce qui précède nous permet de distinguer les deux systèmes de génératrices par un autre procédé. Soit DH une droite quelconque située sur la surface, toutes les droites telles que DG, EK, ... qui rencontrent cette droite fixe, avec une droite D'G' qui lui est parallèle, constituent l'un des systèmes, par exemple, le premier système. Toutes les autres constituent le second système.

532—Nous savons qu'il faut trois directrices pour définir le mouvement d'une ligne droite. Prenons comme directrices trois droites fixes A, B, C appartenant au second système, et supposons qu'une droite mobile glisse sur ces trois directrices; si, par un point quelconque M de la droite A et chacune des droites B et C, on fait passer un plan, l'intersection de ces deux plans déterminera la position de la droite mobile qui passe en ce point; la droite mobile coïncidant ainsi successivement avec toutes les droites du premier système, engendrera l'hyperboloïde à une nappe. De même, une droite mobile, glissant sur trois droites fixes, appartenant au premier système, engendrera l'hyperboloïde. Il résulte de là que l'on peut engen-

drer un hyperboloïde à une nappe, en faisant glisser une droite mobile sur trois droites fixes.

533—Nous allons faire voir que, réciproquement une droite mobile qui glisse sur trois droites fixes quelconques, non parallèles à un même plan, engendre un hyperboloïde. Soient AB, CD, EF les trois directrices données. Si par chacune d'elles on fait passer un plan parallèle à l'une des deux autres, on a six plans qui forment un parallélipipède; prenons pour origine le centre du parallélipipède et pour axes des coordonnées des parallèles aux arêtes, dont nous désignerons les longueurs par $2a$, $2b$, $2c$. Les équations des trois directrices sont, pour la disposition adoptée dans la figure 265,

$$\text{AB}\begin{cases} y=-b, \\ z=c, \end{cases} \quad \text{CD}\begin{cases} z=-c, \\ x=a, \end{cases} \quad \text{EF}\begin{cases} x=-a, \\ y=b, \end{cases}$$

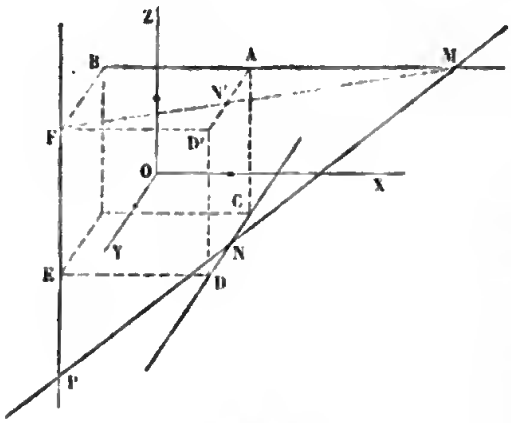


Fig. 265.

Représentons les équations de la génératrice mobile MP par

$$(1)\ x=mz+p,\ y=nz+q.$$

Pour que cette droite rencontre les trois directrices, il faut que les quatre paramètres variables m, n, p, q vérifient les trois équations de condition

$$(2)\begin{cases} p=a+mc, \\ q=-b-nc, \\ \dfrac{a+p}{m}+\dfrac{b-q}{n}=0. \end{cases}$$

Si l'on remplace p et q par leurs valeurs tirées des deux premières équations de condition, les deux équations des génératrices deviennent

$$(3)\ x-a=m(z+c),\quad y+b=n(z-c),$$

et la troisième équation de condition se réduit à

$$(4)\ \frac{a}{m}+\frac{b}{n}+c=0.$$

On obtient l'équation du lieu en éliminant m et n entre les équations (3) et (4), ce qui donne

$$(5)\ ayz+bzx+cxy+abc=0.$$

Le lieu est une surface du second degré ayant un centre unique; ce n'est pas un cône, puisqu'elle ne passe pas par le centre; c'est donc un hyperboloïde à une nappe.

Les trois directrices appartenant à la surface, les trois axes des coordonnées sont des arêtes du cône asymptote; on peut remarquer que les trois arêtes AC, DE, BF qui, dans le parallélipipède, sont parallèles et opposées aux directrices, appartiennent aussi à la surface; par exemple, la droite AC, qui rencontre les deux directrices AB et CD, et qui est parallèle à EF, est une position particulière de la génératrice, et, par conséquent, appartient à la surface. Il résulte de là que les faces parallèles ABF, CDE du parallélipipède sont tangentes à la surface aux points B et D, et de même les autres. Les trois directrices et les trois arêtes opposées forment un hexagone gauche situé sur la surface.

534—Étant donné un hyperboloïde à une nappe, soient AB et CD deux droites quelconques du même système (fig. 265); A un point fixe pris à volonté sur la première droite, C le point correspondant de la seconde, c'est-à-dire le point où cette seconde droite est rencontrée par la génératrice mobile de l'autre système, quand elle passe par le point A. A l'aide de la droite EF du premier système qui est parallèle à AC, on peut former le parallélipipède considéré précédemment. La génératrice mobile, dans une quelconque de ses positions, rencontre les deux droites fixes en M et N; elle a décrit sur ces deux droites, à partir de sa position initiale AC, des longueurs AM et CN que nous désignerons par α et β, en les affectant du signe $+$, quand elles sont portées dans les directions AB ou CD, et du signe $-$, quand elles sont portées dans les directions contraires. Si l'on projette la droite MNP sur le plan ABF, parallèlement à la

droite EF, la longueur CN se projettera en vraie grandeur suivant AN'. En prenant pour axes des coordonnées, les droites AB et AD' et en écrivant que la droite mobile MN' tourne autour du point fixe F, on a la relation

$$(6)\quad \frac{2a}{\alpha} + \frac{2b}{\beta} = 1.$$

Réciproquement, lorsqu'une droite mobile MN décrit sur deux droites fixes AB, CD, à partir d'une position initiale, des longueurs qui vérifient la relation (6), cette droite engendre un hyperboloïde à une nappe. En effet, soit AC la position initiale de la génératrice; par le point A, menons une parallèle AD' à la droite CD, formons le parallélogramme AD'FB, dont les côtés AB et AD' sont égaux à $2a$ et à $2b$, et par le point F, menons une parallèle FE à la droite AC; si l'on prend AB et AD' pour axes des coordonnées dans le plan du parallélogramme, l'équation (6) signifie que la droite MN', projection de la droite MN sur le plan du parallélogramme, parallèlement à AC, passe constamment par le point F; donc la droite MN rencontre la droite EF. Cette droite, glissant sur trois droites fixes AB, CD, EF, engendre un hyperboloïde à une nappe.

535—Nous avons dit que l'hyperboloïde à une nappe admet deux systèmes de génératrices rectilignes. Il est facile de déduire de l'équation de la surface celles de ces deux systèmes de droites. Reprenons l'équation de l'hyperboloïde rapporté à ses axes,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et écrivons cette équation sous la forme

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2};$$

chacun des membres, étant la différence de deux carrés, peut être décomposé en facteurs du premier degré, et l'équation devient

$$(1)\quad \left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

Considérons les deux équations du premier degré

$$(\lambda)\quad \begin{cases} \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{x}{a}\right), \\ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{x}{a}\right), \end{cases}$$

dans lesquelles le paramètre λ est arbitraire. Pour chaque valeur de λ, ces équations représentent une droite. Or, si l'on multiplie ces deux équations membre à membre, on retrouve l'équation (1) ; il en résulte que les équations (λ) représentent un système de droites situées sur la surface.

Si l'on combine autrement les facteurs, on obtient deux autres équations du premier degré

$$(\mu)\quad \begin{cases} \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\mu\left(1+\dfrac{x}{a}\right), \\ \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1-\dfrac{x}{a}\right), \end{cases}$$

renfermant un paramètre arbitraire μ, et qui représentent un second système de droites situées sur la surface.

On peut attribuer aux paramètres λ et μ des valeurs nulles ou infinies. Si l'on pose $\lambda=\frac{m}{n}$, les équations (1) prennent la forme

$$n\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=m\left(1+\frac{x}{a}\right),$$

$$m\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=n\left(1-\frac{x}{a}\right);$$

on fera dans ces équations $m=0$ ou $n=0$.

536—Il est clair que, par tout point de la surface, passent deux droites, une de chaque système. En effet, soit M un point dont les coordonnées x', y', z' vérifient l'équation (1);

si l'on attribue à λ la valeur $\lambda = \dfrac{\dfrac{y'}{b} - \dfrac{z'}{c}}{1 + \dfrac{x'}{a}}$, de manière que la première des équations (λ) soit vérifiée par les coordonnées de ce point, la seconde équation le sera également, puisqu'en divisant membre à membre l'équation (1) par la première des équations (λ), on trouve la suivante. Ainsi les équations (λ), dans lesquelles on attribue au paramètre λ une valeur convenable, représentent une droite passant par le point M. En attribuant de même au paramètre μ une valeur convenable, on aura une seconde droite passant par le point M. D'ailleurs, ces deux droites diffèrent; car, pour que les droites représentées par les équations (λ) et (μ) fussent les mêmes, il faudrait que l'on eût

$$\lambda\left(1 + \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

quelle que soit x, c'est-à-dire à la fois

$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad \lambda = -\frac{1}{\mu},$$

ce qui est impossible. Il résulte de là que les équations (λ) et et (μ) représentent toutes les droites situées sur l'hyperboloïde à une nappe.

537—Les parallèles menées par le centre aux droites (λ) ont pour équation

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = \lambda \dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = -\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{x}{a}; \end{cases}$$

l'élimination du paramètre λ donne l'équation du cône asymptote

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{x^2}{a^2}.$$

Les parallèles menées par le centre aux droites (μ) ont pour équations

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\mu\dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{x}{a}, \end{cases}$$

et l'élimination du paramètre μ conduit encore au cône asymptote. On voit d'ailleurs que les deux systèmes de parallèles coïncident; car si l'on donne à μ la valeur $-\frac{1}{\lambda}$, les équations (3) sont les mêmes que les équations (2). Ainsi les droites de l'un et l'autre système sont respectivement parallèles aux arêtes du cône asymptote.

538—Nous allons faire voir maintenant que les droites représentées par les équations (λ) constituent l'un des systèmes que nous avons définis précédemment par des considérations géométriques à l'aide de l'ellipse de gorge, et que les droites représentées par les équations (μ) constituent l'autre système.

Il suffit pour cela de démontrer que toutes les droites du premier groupe rencontrent une droite fixe du second groupe, excepté une, qui lui est parallèle. Considérons deux droites représentées par les équations (λ) et (μ), quand on attribue à λ et à μ des valeurs quelconques; on obtiendra le point d'intersection de ces deux droites, en regardant ces quatre équations comme simultanées; en comparant la première et la quatrième, la seconde et la troisième, on en déduit les deux équations

$$\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$
$$\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{a}\right)=\mu\left(1+\frac{x}{a}\right),$$

qui se réduisent à une seule et qui donnent

$$x=-a\,\frac{\lambda-\dfrac{1}{\mu}}{\lambda+\dfrac{1}{\mu}}.$$

Si le dénominateur $\lambda+\frac{1}{\mu}$ n'est pas nul, on obtient pour x, y, z

des valeurs finies et déterminées vérifiant les quatre équations ; ainsi les deux droites se coupent. Si l'on a $\lambda = -\frac{1}{\mu}$, les parallèles (2) et (3) menées par le centre à ces deux droites coïncident, et, par conséquent, les droites sont parallèles.

CHAPITRE V

Des Paraboloïdes.

Les surfaces du second degré dépourvues de centre sont représentées par l'équation

$$S'y^2 + S''z^2 + Px = 0.$$

Cette seconde classe se subdivise en deux genres, suivant que les coefficients S', S'' ont le même signe ou des signes contraires.

PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE.

539—Considérons le cas où les deux racines S' et S'' ont le même signe, par exemple le signe $+$. On peut supposer P négatif. Si l'on pose

$$2p = -\frac{P}{S'}, \quad 2q = -\frac{P}{S''},$$

l'équation devient

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x.$$

La surface passe à l'origine ; les sections faites par les plans principaux YOX, ZOX sont deux paraboles P et Q, qui ont pour axe commun la droite OX (fig. 266).

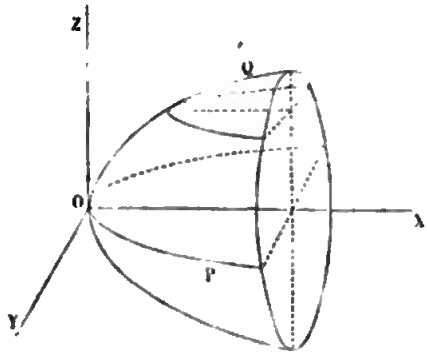


Fig. 266.

Coupons la surface par des plans perpendiculaires à la droite OX. Pour $x=0$, la section se réduit au point O ; en attribuant à x des valeurs positives de plus en plus grandes,

on obtient des ellipses homothétiques qui ont leur centre sur la droite OX et qui augmentent indéfiniment. Les plans situés à gauche du plan YOZ ne coupent pas la surface. Ainsi, la surface se compose d'une nappe indéfinie située tout entière à droite du plan YOZ; on lui a donné le nom de *paraboloïde elliptique*. La droite OX est un *axe* de la surface; le point O en est le sommet.

Les sections par des plans parallèles au plan principal XOY sont des paraboles égales à la parabole P, et qui ont leurs sommets sur la parabole Q et leurs axes parallèles à OX. Il en résulte que l'on peut regarder la surface comme engendrée par la parabole P qui se meut parallèlement à elle-même, son sommet décrivant la parabole Q. De même, les sections par des plans parallèles au plan principal XOZ sont des paraboles égales à la parabole Q, et l'on peut regarder la surface comme engendrée par la parabole Q se mouvant parallèlement à elle-même, son sommet décrivant la parabole P.

540—Les sections de la surface par des plans

$$Ax + By + Cz = l,$$

non parallèles à l'axe, sont des ellipses ayant pour projections sur le plan YOZ

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = \frac{l - By - Cz}{A}.$$

On voit, en outre, que les projections sont des ellipses homothétiques entre elles, quelle que soit la direction du plan sécant.

Lorsque le plan sécant

$$By + Cz = l$$

est parallèle à l'axe du paraboloïde, la section, qui a pour projection sur le plan XOY,

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{(l - By)^2}{2C^2q} = x,$$

est une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe du paraboloïde. Le paramètre de cette parabole étant indépendant de l, il en résulte que des plans parallèles entre eux et parallèles à l'axe coupent la surface suivant des paraboles égales.

541—Considérons en particulier le cas où $p=q$; l'équation de la surface devient

$$y^2+z^2=2px;$$

les sections par les plans perpendiculaires à l'axe OX sont des cercles; ainsi, la surface est de révolution; elle est engendrée par la parabole P tournant autour de son axe OX. Les sections par des plans non parallèles à l'axe sont des ellipses qui se projettent sur le plan YOZ suivant des cercles. Les sections par des plans parallèles à l'axe sont des paraboles égales.

PLANS DIAMÉTRAUX.

542—Le plan diamétral conjugué de la droite

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$$

a pour équation

$$\frac{\beta y}{p}+\frac{\gamma z}{q}=\alpha,$$

c'est un plan parallèle à l'axe. Ce plan coupe la surface suivant une parabole; cette parabole est la courbe de contact du paraboloïde et d'un cylindre circonscrit ayant ses génératrices parallèles à la direction des cordes. Réciproquement tout plan parallèle à l'axe est un plan diamétral.

Lorsque les droites sont parallèles à l'axe, chacune d'elles ne rencontre la surface qu'en un point, et il n'y a plus de plan diamétral. Le plan diamétral s'est éloigné à l'infini.

DIAMÈTRES.

543—La section de la surface par le plan

$$Ax+By+Cz=l$$

a pour projection sur le plan YOZ la courbe définie par l'équation

$$\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=\frac{l-By-Cz}{A}.$$

Le centre de cette courbe est donné par les deux équations

$$\frac{y}{Bq}=\frac{z}{Cq}=-\frac{1}{A},$$

jointe à l'équation du plan sécant. Ces deux équations, ne renfermant pas le paramètre variable l, représentent le lieu des centres des sections parallèles; ce lieu est une droite parallèle à l'axe. En d'autres termes, les projections des sections parallèles sur le plan YOZ sont des ellipses homothétiques et concentriques. Réciproquement toute droite parallèle à l'axe est un diamètre.

544—Prenons pour origine des coordonnées un point quelconque M de la surface, pour axe des x le diamètre qui passe en ce point, pour plan des xy un plan quelconque mené par la droite MX; ce plan coupe la surface suivant une parabole; nous prendrons pour axes des y la tangente à la parabole au point M, et pour axe des z la parallèle menée par le point M à la direction conjuguée du plan XMY. L'équation de la surface, ne contenant pas de terme du premier degré en z, et devant se réduire à celle d'une parabole rapportée à son diamètre et à la tangente à l'extrémité quand on fait $z=0$, sera de la forme

$$\frac{y^2}{2p'}+\frac{z^2}{2q'}=x;$$

les deux paramètres p' et q' auront le même signe, par exemple le signe $+$, sans quoi les sections par des plans quelconques seraient des hyperboles. On voit par là que le plan XMZ est conjugué de la direction MY. Les sections faites par des plans parallèles au plan YMZ sont des ellipses rapportées à deux diamètres conjugués.

On peut obtenir d'une autre manière les axes des coordonnées auxquels nous venons de rapporter la surface. Considérons un plan quelconque non parallèle à l'axe du paraboloïde; ce plan coupe la surface suivant une ellipse; par le centre de l'ellipse, menons une parallèle à l'axe jusqu'à la rencontre de la surface, et par ce point, des parallèles à deux diamètres conjugués de l'ellipse; l'équation de la surface se réduira à la forme précédente.

SECTIONS CIRCULAIRES.

545—Considérons un plan coupant la surface suivant un cercle; par le centre C passe un diamètre CX′; le plan mené par ce diamètre perpendiculairement au plan du cercle, divisant ce cercle et tous les cercles parallèles en deux parties symétriques, est un plan principal de la surface. Ainsi, les plans des sections circulaires sont perpendiculaires à l'un des plans principaux.

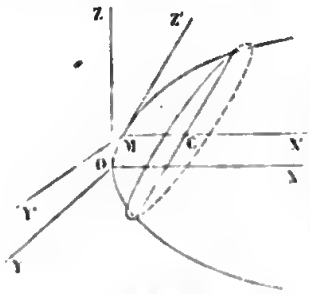


Fig. 267.

Supposons le plan du cercle perpendiculaire au plan principal XOZ, et la surface rapportée à ses deux plans principaux. Prenons pour nouveaux axes des coordonnées le diamètre MX′, la tangente MZ′ à la parabole principale, et la perpendiculaire MY′ au plan principal; la coordonnée y ne changeant pas dans la transformation des coordonnées, si l'on désigne par θ l'angle Z′MX′, l'équation de la surface deviendra

$$\frac{y'^2}{2p}+\frac{z'^2\sin^2\theta}{2q}=x'.$$

Les sections parallèles au plan Y′MZ′ étant des cercles, on doit avoir $q=p\sin^2\theta$, d'où $\sin\theta=\sqrt{\frac{q}{p}}$.

Le paramètre q étant moindre que p, et l'angle θ pouvant recevoir deux valeurs supplémentaires, on en conclut que le paraboloïde admet deux séries de sections circulaires qui sont perpendiculaires sur la section principale de moindre paramètre, et également inclinées sur l'autre section principale.

PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

546—Considérons maintenant le cas où S′ et S″ sont de signes contraires. Admettons que P ait le même signe que S″ et posons

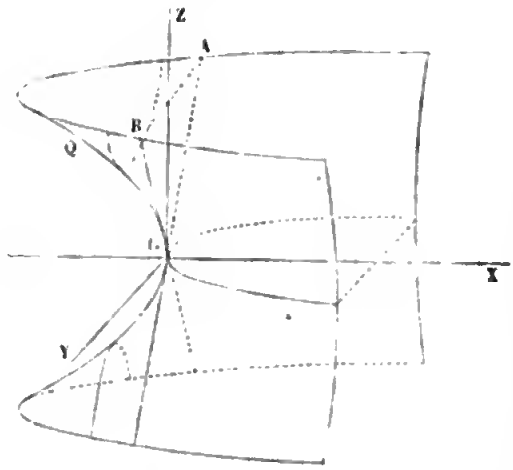


Fig. 268.

$$2p = -\frac{P}{S'},$$

$$2q = \frac{P}{S''},$$

l'équation devient

$$\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2q} = x.$$

Les sections faites par les plans principaux XOY, XOZ sont deux paraboles P et Q dont les axes sont dirigés en sens contraires. Le plan ZOY coupe la surface suivant deux droites OA, OB qui font avec OZ un angle dont la tangente a pour valeur $\sqrt{\frac{p}{q}}$. Les sections faites par des plans parallèles à YOZ sont des hyperboles homothétiques entre elles ou à l'hyperbole conjuguée; si le plan est du côté OX, l'axe réel de l'hyperbole est parallèle à OY ; s'il est de l'autre côté, l'axe réel est parallèle à OZ. La surface se compose d'une nappe qui s'étend indéfiniment à droite et à gauche du plan YOZ. On lui a donné le nom de *paraboloïde hyperbolique*. La droite OX est un axe de la surface; le point O en est le sommet.

Les sections par des plans parallèles au plan principal XOY sont des paraboles égales à la parabole P et ayant leurs sommets sur la parabole Q. De même, les sections par des plans parallèles au plan principal XOZ sont des paraboles égales à la parabole Q et ayant leurs sommets sur la parabole P; de sorte qu'on peut concevoir la surface comme engendrée par une parabole qui se meut parallèlement à elle-même, son sommet décrivant une autre parabole.

547—Les sections par des plans

$$Ax + By + Cz = l,$$

non parallèles à l'axe, sont des hyperboles ayant pour projections sur le plan YOZ

$$\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2q} = \frac{l - By - Cz}{A}.$$

On voit, en outre, que ces projections sont des hyperboles homothétiques entre elles, quelle que soit la direction du plan sécant.

Lorsque le plan sécant

$$By + Cz = l$$

est parallèle à l'axe du paraboloïde, la section qui a pour projection sur le plan XOY

$$\frac{y^2}{2p} - \frac{(l - By)^2}{2C^2q} = x,$$

est une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe du paraboloïde ; les sections parallèles sont des paraboles égales. L'équation précédente peut s'écrire

$$\left(\frac{1}{2p} - \frac{B^2}{2C^2q}\right)y^2 + \frac{2Bly}{2C^2q} - \frac{l^2}{2C^2q} = x;$$

quand on a $\frac{C}{B} = \pm\sqrt{\frac{p}{q}}$, l'équation se réduit au premier degré ; ainsi, il y a deux directions pour lesquelles le plan coupe la surface suivant une droite. Ces deux séries de plans sont parallèles aux deux plans

$$\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2q} = 0;$$

ces deux plans sont les plans AOX, BOX qui passent par l'axe OX, et chacune des droites OA, OB, suivant lesquelles le plan tangent au sommet O coupe la surface.

PLANS DIAMÉTRAUX ET DIAMÈTRES.

548—Le plan diamétral conjugué de la direction

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

a pour équation

$$\frac{\beta y}{p} - \frac{\gamma z}{q} = \alpha;$$

il est parallèle à l'axe. Lorsque les droites deviennent paral-

lèles à l'axe, elles ne rencontrent la surface qu'en un point, et le plan diamétral s'éloigne à l'infini. Une droite parallèle à l'un des deux plans AOX, BOX ne rencontre aussi la surface qu'en un point; car le plan, mené par cette droite parallèlement à l'un de ces deux plans, coupe la surface suivant une droite. Si l'on considère une série de droites parallèles au plan AOX, mais non parallèles à l'axe, l'équation du plan diamétral représente un plan parallèle à l'axe et passant par celle des droites qui est située sur la surface.

Tout plan parallèle à l'axe est un plan diamétral, excepté lorsque ce plan est parallèle à l'un des plans AOX, BOX.

On verrait, comme pour le paraboloïde elliptique, que le diamètre, ou le lieu des centres d'une série de sections parallèles, est une droite parallèle à l'axe.

549—Si l'on prend pour origine des coordonnées un point quelconque M de la surface, pour axe des x le diamètre qui passe en ce point, pour plan des xy un plan quelconque mené par la droite MX, pour axe des y la tangente à la parabole au point M, et pour axe des z une parallèle à la direction conjuguée du plan XMY, l'équation de la surface prendra la forme

$$\frac{y^2}{2p'} - \frac{z^2}{2q'} = x.$$

Ceci nous permet de compléter l'étude des sections planes; le plan YMZ coupe la surface suivant deux droites; les plans parallèles à ce plan coupent la surface suivant des hyperboles homothétiques, mais dont la disposition change suivant que le plan sécant est d'un côté ou de l'autre du plan YMZ. Si l'on prenait pour axes des y et des z les deux droites qui passent par le point M, l'équation de la surface se réduirait à la forme

$$yz = kx.$$

GÉNÉRATRICES RECTILIGNES DU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

550—Il est impossible de placer une droite sur le paraboloïde elliptique; car, si par cette droite on mène un plan, ce plan coupera la surface suivant une ellipse ou une parabole.

Mais la même impossibilité n'existe pas pour le paraboloïde hyperbolique. Nous venons de reconnaître, en étudiant les sections planes, que par tout point M de la surface passent deux droites situées tout entières sur la surface. Le plan de ces deux droites est le plan tangent à la surface au point M. Nous remarquons d'ailleurs que par le point M, il ne passe pas une troisième droite située sur la surface; car, s'il y en avait une troisième, elle serait aussi contenue dans le plan tangent; or ce plan ne coupe la surface que suivant deux droites. Nous avons vu aussi que tout plan parallèle à l'un des deux plans AOX, BOX coupe la surface suivant une droite; les deux droites qui passent par le point M sont donc parallèles, l'une au plan AOX, l'autre au plan BOX. Il résulte de là que les droites situées sur la surface du paraboloïde hyperbolique peuvent être distinguées en deux séries, dont chacune constitue toute la surface. La première série se compose des droites parallèles au plan AOX, celles de la seconde série sont parallèles au plan BOX; ces deux plans ont reçu le nom de *plans directeurs*.

Mais on opère commodément cette distinction et on se rend bien compte de la position des droites, en se servant de l'une des paraboles principales.

551—Puisque par tout point de la surface passent deux droites, il est clair que par tout point D de la parabole principale P passent deux droites DG, DH situées sur la surface. Si l'on prend pour axes des coordonnées le diamètre DX′, la tangente DS à la parabole principale, et la perpendiculaire DZ′ au plan principal, et si l'on désigne par θ l'angle SDX′, la surface aura pour équation

$$\frac{y'^2 \sin^2\theta}{2p} - \frac{z'^2}{2q} = x'.$$

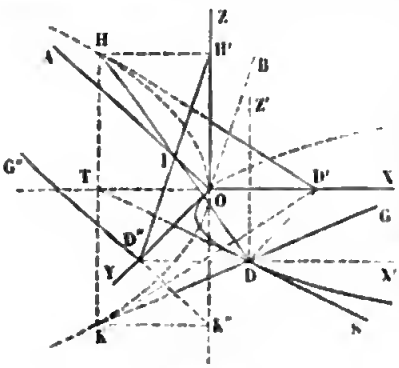


Fig. 269.

Le plan Z′DS a pour trace, sur

le plan principal, la tangente ST à la parabole principale; ce plan $x'=0$ coupe la surface suivant deux droites

$$\frac{y'^2 \sin^2 \theta}{2p} - \frac{z'^2}{2q} = 0,$$

qui se projettent sur le plan principal suivant la tangente ST. Ainsi, *toute tangente à une parabole principale est la projection de deux droites situées sur la surface.*

Les deux droites DG, DH font des angles égaux avec le plan principal ou avec la perpendiculaire DZ' à ce plan; si l'on appelle γ ce dernier angle, on a

$$\tang \gamma = \sqrt{\frac{p}{q}} \times \frac{1}{\sin \theta}.$$

552—Imaginons maintenant que le point D parcoure la parabole principale P dans le sens OD; toutes les droites, dont les parties supérieures au plan principal font avec les tangentes, prises dans le sens du mouvement, des angles aigus, formeront le premier système; toutes celles dont les parties supérieures font avec ces mêmes tangentes des angles obtus, formeront le second système. Ainsi, les droites OA et DG appartiennent au premier système, les droites OB et DH au second système. Il est clair que ces deux systèmes, tels que nous venons de les définir, comprennent toutes les droites situées sur la surface; nous remarquons d'abord qu'une droite quelconque, située sur la surface, rencontre le plan principal en un point D de la parabole P, puisque les sections parallèles à ce plan sont des paraboles; or, par le point D passent seulement deux droites DG, DH appartenant, l'une au premier système, l'autre au second; la droite considérée coïncidera donc avec l'une de ces deux droites.

553—Cette manière de distinguer les deux systèmes de droites s'accorde avec celle que nous avons donnée d'abord au moyen de deux plans directeurs. Nous allons faire voir, en effet, que toutes les droites du premier système sont parallèles à un même plan AOX, toutes celles du second système au plan

BOX. Les deux droites DH, DG percent le plan principal XOZ aux points H et K appartenant à la parabole principale Q, et situés sur la verticale élevée par le point T où la tangente DS rencontre le prolongement de l'axe OX ; les projections HD′, KD′ de ces deux droites sur le plan principal XOZ sont tangentes à la parabole Q, et passent par le point D′ projection du point D. Le point D se projette en D″ sur le plan YOZ ; les points H et K se projettent en H′ et K″ ; en joignant D″H′, D″K″, on aura les projections D″H′, D″G″ des deux droites DH, DG sur le plan YOZ. Les points D et H appartenant aux paraboles principales, on a $\overline{DD'}^2 = 2p \times OD'$, $\overline{HT}^2 = 2q \times OT$; les deux longueurs OD′ et OT étant égales entre elles, il en résulte

$$\frac{OD''}{OH'} = \frac{DD'}{HT} = \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Ainsi, la projection D″H′ de la droite DH sur le plan YOZ conserve une direction constante et reste parallèle à la droite OB du même système. De même, la projection K″D″G″ de la droite DG conserve une direction constante et reste parallèle à la droite OA. En d'autres termes, la droite DG du premier système reste parallèle au plan AOX, et la droite DH du second système reste parallèle au plan BOX.

Quand le point D parcourt la parabole principale P en partant du sommet O, l'angle γ que font les deux droites DG et DH avec la verticale DZ′ augmente de plus en plus, et tend vers un angle droit.

554—Les deux droites DD″, HH′ étant égales et parallèles, nous remarquons que la figure DD″HH′ est un parallélogramme, et, par conséquent, que les diagonales DH, D″H′ se coupent mutuellement en deux parties égales ; ainsi le point I, où la génératrice DH perce le plan YOZ, est le milieu de la portion DH de cette droite comprise entre les deux plans principaux ; le lieu du point I est la droite OA du premier système.

555—Par chaque point de la surface passent deux droites,

une de chaque système; il est facile de les construire. Soit M un point de la surface que nous supposerons situé au-dessus du plan principal XOY (fig. 270); ce point se projette en un point m extérieur à la parabole P; par le point m menons des tangentes mD, mE à la parabole; par le point de contact D de la première tangente, menons la droite DG du premier système, et, par le point de contact E de la seconde, la droite EL du second système. Les plans projetants GDm, LEm de ces deux droites se coupent suivant une droite MM′ perpendiculaire au plan XOY; cette perpendiculaire élevée par le point m perce la surface en deux points; l'un est le point M situé au-dessus du plan principal, l'autre le point symétrique M′ situé en dessous. La droite DG, faisant avec Dm un angle aigu, rencontre la partie supérieure mM de la droite MM′, et elle passe au point M, puisque cette partie supérieure ne rencontre la surface qu'en un point. De même, la droite EL faisant avec le prolongement de mE un angle obtus, ou avec Em un angle aigu, rencontre la partie supérieure mM de la même droite au même point M. Ainsi, par le point M passent les deux droites MD, ME, qui appartiennent, l'une au premier système, l'autre au second.

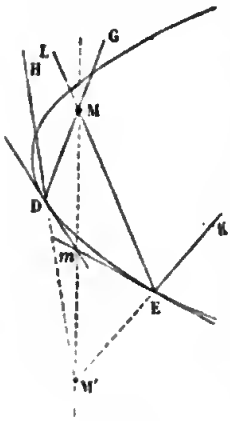


Fig. 270.

556—Soient DG, EL deux génératrices de systèmes différents (fig. 270); ces droites se projettent sur le plan principal suivant des tangentes Dm, Em à la parabole principale; ces deux tangentes se coupent en un point m, et les deux plans projetants suivant une droite MM′ perpendiculaire au plan principal. Comme nous l'avons expliqué plus haut, les deux droites DG, EL, appartenant à des systèmes différents, rencontrent la perpendiculaire MM′ d'un même côté du plan principal, et, par conséquent, se coupent au point M, où cette perpendiculaire perce la surface. Ainsi, *deux génératrices de systèmes différents se rencontrent toujours.*

557—Considérons maintenant deux génératrices DG, EK du même système. Ces droites, étant situées dans deux plans respectivement parallèles au même plan directeur, et par conséquent parallèles entre eux, ne peuvent se rencontrer. Elles ne sont pas non plus parallèles; car leurs projections sur un plan principal ne sont pas parallèles. On conclut de là que *deux génératrices du même système ne sont jamais dans le même plan.*

Ce qui précède nous permet de distinguer les deux systèmes de génératrices par un autre procédé. Soit DH une droite quelconque située sur la surface; toutes les droites, telles que DG, EK, qui rencontrent cette droite, constituent l'un des systèmes, par exemple le premier système. Toutes les autres constitueront le second système.

558—Nous savons qu'il faut trois directrices pour définir le mouvement d'une droite. Prenons comme directrices trois droites fixes A, B, C appartenant au second système, et par conséquent parallèles au second plan directeur, et supposons qu'une droite mobile glisse sur ces trois directrices, elle coïncidera successivement avec chacune des droites du premier système, et, par conséquent, engendrera le paraboloïde hyperbolique.

On peut aussi définir le mouvement de la génératrice en l'assujettissant à glisser sur les deux droites fixes A et B et à rester parallèle au premier plan directeur. En effet, si par un point quelconque M de la droite A et par la droite B on fait passer un plan, que par ce même point M on mène un plan parallèle au plan directeur, l'intersection de ces deux plans déterminera la position de la droite mobile qui passe par le point M; elle coïncidera donc avec la droite du premier système qui passe par ce point. Il résulte de là que le paraboloïde hyperbolique peut être engendré par une droite mobile qui glisse sur trois droites fixes parallèles à un même plan, ou bien qui glisse sur deux droites fixes en restant constamment parallèle à un même plan.

559—Les réciproques sont vraies. Supposons d'abord que la génératrice soit assujettie à glisser sur deux droites fixes OZ et AB (fig. 271), en restant parallèle à un même plan. Prenons pour axe des y une position particulière OA de la génératrice, pour axe des z la directrice OZ, pour plan des xy un plan parallèle au plan directeur, et pour plan des zx un plan parallèle à la droite AB. Cette seconde directrice AB aura pour équations

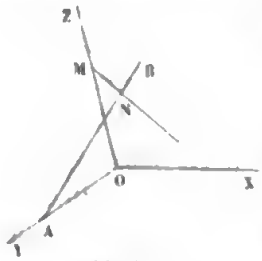


Fig. 271.

$$(1)\quad y=a,\quad x=az.$$

Soit MN une position quelconque de la génératrice; cette droite, étant parallèle au plan XOY et rencontrant l'axe OZ, a des équations de la forme

$$(2)\quad z=p,\quad y=mx,$$

avec deux paramètres variables m et p. Pour qu'elle rencontre la seconde directrice AB, il faut que l'équation de condition

$$(3)\quad amp=a$$

soit vérifiée. Si l'on élimine les deux paramètres m et p entre les équations (2) et (3), on obtient l'équation du lieu

$$(4)\quad ayz=ax.$$

La surface est du second degré; elle est dépourvue de centre; ce n'est pas un cylindre parabolique, puisque les droites OZ et AB, non parallèles, sont situées sur la surface; c'est donc un paraboloïde hyperbolique.

560—Supposons maintenant que la génératrice soit assujettie à glisser sur trois droites fixes AB, OZ, CD (fig. 272) parallèles à un même plan. Prenons pour axe des z l'une des directrices OZ, pour axe des y une position particulière AC de la génératrice; par le point de rencontre O de ces deux droites, menons des parallèles OG, OH aux deux autres directrices AB, CD; puisque les trois directrices sont

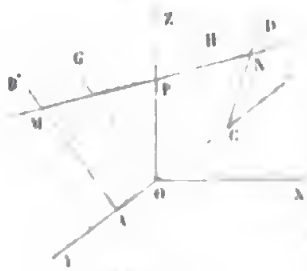


Fig. 272.

parallèles à un même plan, les trois droites OZ, OG, OH seront situées dans un même plan; nous prendrons pour axe des x une droite quelconque menée par le point O dans ce plan. Cela posé, la directrice AB est représentée par les équations

$$(1)\quad y=a,\quad x=\alpha z,$$

et de même la directrice CD par les équations

$$(2)\quad y=a',\quad x=\alpha' z.$$

La génératrice MN, qui rencontre la droite OZ en P, aura des équations de la forme

$$(3)\quad y=mx,\quad z=nx+p.$$

La génératrice rencontrant les deux directrices AB, CD, on a, entre les trois paramètres m, n, p, les deux relations

$$(4)\quad \frac{a}{\alpha}=an+mp,$$

$$(5)\quad \frac{a'}{\alpha'}=a'n+mp.$$

En retranchant ces deux relations membre à membre, on trouve

$$(6)\quad \frac{a}{\alpha}-\frac{a'}{\alpha'}=(a-a')n.$$

Ceci nous apprend que le paramètre n a une valeur constante; ainsi la projection de la génératrice sur le plan ZOX a une direction constante; si l'on prend l'axe OX parallèle à cette direction, on aura $n=0$, et les équations de la génératrice se réduiront à

$$y=mx,\quad z=p,$$

les deux paramètres variables m et p étant liés par la relation

$$\alpha mp=a.$$

On est ramené au cas précédent; la génératrice MN glisse sur les deux droites OZ, AB, en restant constamment parallèle au plan XOY; elle engendre donc un paraboloïde hyperbolique.

561—Nous avons trouvé la relation qui existe, dans l'hyperboloïde à une nappe, entre les deux longueurs décrites sur deux droites fixes AB, CD de l'un des systèmes par une droit

mobile de l'autre système. La relation est beaucoup plus simple dans le paraboloïde hyperbolique. Soient MN, M'N', M''N'' (fig. 273) trois positions quelconques de la droite mobile ; si par chacune d'elles on mène un plan parallèle au plan directeur, on aura trois plans parallèles entre eux ; or, on sait que trois plans parallèles déterminent sur deux droites AB, CD des segments proportionnels ; on a donc la relation

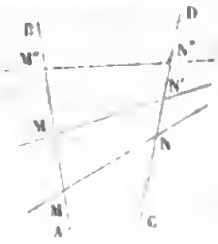


Fig. 273.

$$\frac{MM'}{NN'} = \frac{MM''}{NN''}.$$

Ainsi, *dans le paraboloïde hyperbolique, une droite mobile de l'un des systèmes décrit sur deux droites fixes de l'autre système des longueurs proportionnelles.*

Réciproquement, lorsqu'une droite mobile glisse sur deux droites fixes AB, CD, en décrivant sur ces droites des longueurs proportionnelles, elle engendre un paraboloïde hyperbolique. Soient MN, M'N' deux positions particulières de la génératrice; concevons le plan parallèle à ces deux droites. Soit maintenant M''N'' une position quelconque de la génératrice ; on a la relation

$$\frac{MM''}{NN''} = \frac{MM'}{NN'}.$$

Si par chacune des deux droites MN, M'N' on mène un plan parallèle au plan défini précédemment, et que par le point M'' on mène un plan parallèle au même plan, on aura trois plans parallèles qui déterminent sur les deux droites AB, CD des segments proportionnels; le plan mené par le point M'' passera donc par le point N'' et contiendra la droite M''N'' ; on en conclut que la génératrice mobile M''N'' reste constamment parallèle à un même plan; elle engendre donc un paraboloïde hyperbolique.

562—C'est d'après cette propriété remarquable que l'on construit des modèles en fil représentant le paraboloïde hyper-

bolique. Imaginons que l'on ait fait un cadre en bois ACDB, ayant la forme d'un quadrilatère gauche; si l'on divise les deux côtés opposés AB, CD en un même nombre de parties égales, et que l'on joigne par des fils tendus les points de division correspondants, ces fils représenteront l'un des systèmes de génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique. Si l'on divise de même les deux côtés opposés AC, BD en un même nombre de parties égales, et que l'on joigne par des fils les points correspondants, on obtiendra le second système de génératrices.

Si le quadrilatère ACDB était plan, les fils seraient tous situés dans le plan du quadrilatère; mais, que l'on déforme le quadrilatère de manière à le rendre gauche, les fils cesseront d'être situés dans un même plan et formeront un paraboloïde hyperbolique; c'est pourquoi on a donné aussi à cette surface le nom de *plan gauche*.

563—Il est facile de déduire de l'équation du paraboloïde hyperbolique

$$\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2q} = x$$

celles des deux systèmes de génératrices. En effet, cette équation peut être mise sous la forme

$$(1) \quad \left(\frac{y}{\sqrt{2p}} + \frac{z}{\sqrt{2q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{2p}} - \frac{z}{\sqrt{2q}}\right) = x.$$

Les deux équations du premier degré

$$(\lambda) \quad \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{2p}} - \dfrac{z}{\sqrt{2q}} = \lambda, \\ \dfrac{y}{\sqrt{2p}} + \dfrac{z}{\sqrt{2q}} = \dfrac{x}{\lambda}, \end{cases}$$

dans lesquelles le paramètre λ est arbitraire, représentent un système de droites situées sur la surface; car, en multipliant ces deux équations membre à membre, on retrouve l'équation (1). Les deux équations

$$(\mu)\quad \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{2p}} + \dfrac{z}{\sqrt{2q}} = \mu, \\ \dfrac{y}{\sqrt{2p}} - \dfrac{z}{\sqrt{2q}} = \dfrac{x}{\mu}, \end{cases}$$

dans lesquelles le paramètre μ est arbitraire, représentent un second système de droites situées sur la surface. Il est clair que par tout point de la surface passent deux droites, une de chaque système. D'ailleurs, la première des équations (λ) montre que toutes les droites du premier système sont parallèles au plan

$$\frac{y}{\sqrt{2p}} - \frac{z}{\sqrt{2q}} = 0;$$

et de même la première des équations (μ) montre que toutes les droites du second système sont parallèles au plan

$$\frac{y}{\sqrt{2p}} + \frac{z}{\sqrt{2q}} = 0.$$

Ainsi, les systèmes d'équations (λ) et (μ) représentent bien les deux systèmes de génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique, tels que nous les avons définis géométriquement.

CHAPITRE VI.

Discussion des équations numériques du second degré.

Étant donnée une équation numérique du second degré, on propose de déterminer la nature de la surface définie par cette équation.

PREMIÈRE MÉTHODE.

564—On applique à l'équation proposée la méthode de réduction exposée au chap. II; non-seulement on obtient par ce procédé la nature de la surface, mais encore on détermine d'une manière précise sa situation et ses paramètres. Lorsqu'on veut reconnaître seulement la nature de la surface, il

n'est pas nécessaire d'effectuer tous les calculs indiqués. On commence par former l'équation du troisième degré qui donne S; il y a ensuite plusieurs cas à distinguer.

1° Quand l'équation du troisième degré n'a pas de racine nulle, on sait que la surface a un centre unique, et que son équation peut être ramenée à la forme

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 + F_1 = 0.$$

Pour déterminer la nature de la surface, il suffit de calculer F_1 et de voir les signes des racines S, S', S'', signes qui sont donnés immédiatement par le théorème de Descartes.

2° Quand l'équation du troisième degré a une seule racine nulle, l'équation peut être réduite à l'une des deux formes

$$S'y^2 + S''z^2 + Px = 0,$$
$$S'y^2 + S''z^2 + F_1 = 0.$$

La première représente des surfaces dépourvues de centre, et la seconde des surfaces ayant pour centres tous les points d'une droite. Pour connaître la forme qui convient à l'exemple donné, on aura recours aux équations qui déterminent le centre. Lorsque ces équations sont incompatibles, le lieu est un paraboloïde, elliptique si S' et S'' ont le même signe, hyperbolique si S' et S'' ont des signes contraires. Lorsque le lieu admet une infinité de centres, ce lieu est un cylindre, dont on détermine la nature par une section non parallèle à l'axe.

3° Lorsque l'équation du troisième degré a deux racines nulles, l'équation peut être réduite à l'une des formes

$$S''z^2 + Px = 0,$$
$$S''z^2 + F_1 = 0.$$

La première représente une surface dépourvue de centre, et la seconde une surface qui admet pour centres tous les points d'un plan. On aura encore recours aux équations qui déterminent le centre. Si ces équations sont incompatibles, le lieu est un cylindre parabolique. Si elles se réduisent à une seule, le lieu est l'ensemble de deux plans parallèles, un plan unique, ou l'équation n'a pas de solutions réelles; une section non parallèle au plan des centres déterminera la nature du lieu.

565—La discussion est résumée dans le tableau suivant.

1re CLASSE. L'équation du troisième degré n'a pas de racine nulle. — Surfaces ayant un centre unique.	Les trois racines de même signe. Genre ellipsoïde.	F_1 a un signe contraire à celui des racines.	Ellipsoïde.
		$F_1 = 0$	Un point.
		F_1 de même signe.	Rien.
	Deux racines de même signe, une de signe contraire. — Genre hyperboloïde.	F_1 a un signe contraire à celui des deux premières racines.	Hyperboloïde à une nappe.
		$F_1 = 0$	Cône.
		F_1 de même signe.	Hyperboloïde à deux nappes.
2e CLASSE. L'équation du troisième degré a une ou deux racines nulles. — Surfaces n'ayant pas de centre, ou une infinité de centres.	Une seule racine nulle et pas de centre. — Genre paraboloïde.	Les deux autres racines de même signe.	Paraboloïde elliptique.
		De signes contraires.	Paraboloïde hyperbolique.
	Une seule racine nulle et une infinité de centres en ligne droite.	Les deux autres racines de même signe.	Cylindre elliptique. Une droite. Rien.
		De signes contraires.	Cylindre hyperbolique. Deux plans qui se coupent.
	Deux racines nulles et pas de centre.	Cylindre parabolique.	
	Deux racines nulles et une infinité de centres dans un plan.	Deux plans parallèles. Un plan. Rien.	

Remarque.—La réduction expliquée au chapitre II suppose les axes primitifs rectangulaires. Or, il est évident que si l'on construit, avec deux systèmes d'axes différents, les lieux représentés par une même équation du second degré, ces lieux seront toujours de même espèce ; cependant l'une des surfaces pourra être de révolution sans que la seconde le soit. Les conclusions précédentes s'appliquent donc à un système d'axes quelconques.

DEUXIÈME MÉTHODE.

566—On forme les équations qui déterminent le centre de la surface. Il y a plusieurs cas à distinguer.

1° La surface admet un centre unique. Dans ce cas, pour simplifier, on transporte les axes au centre, et l'équation se réduit à

$$(1)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+F_1=0.$$

Lorsque le terme constant F_1 est nul, le lieu est un point unique ou un cône. Pour décider la question on fait une section par un plan parallèle à l'un des plans coordonnés; si la section est une courbe réelle, le lieu est un cône. Si la section est imaginaire, le lieu est un point.

Le cas où F_1 est différent de zéro se subdivise en deux, suivant que l'équation renferme le carré de l'une des variables ou que les trois carrés manquent. Supposons que le coefficient A'', par exemple, soit différent de zéro, et résolvons l'équation (1) par rapport à z, nous aurons

$$A''z=-(B'x+By)\pm\sqrt{Mx^2+2Nxy+Py^2-A''F_1},$$

en posant, pour abréger,

$$M=B'^2-A''A,\quad N=B'B-A''B'',\quad P=B^2-A''A'.$$

Le plan

$$(2)\quad A''z=-(B'x+By)$$

est le plan diamétral des cordes parallèles à l'axe OZ. La trace de la surface sur ce plan diamétral se projette sur le plan XOY suivant la courbe définie par l'équation

$$(3)\quad Mx^2+2Nxy+Py^2-A''F_1=0.$$

Cette courbe admet un centre unique; car on a

$$N^2-MP=-A''D,$$

D étant le dénominateur ou le déterminant relatif aux équations du centre. En outre le terme constant $-A''F_1$ est différent de zéro.

Supposons que le lieu défini par l'équation (3) soit du genre ellipse; ce lieu sera une ellipse réelle ou une ellipse imaginaire, mais pas un point. Si le lieu est une ellipse réelle, la courbe a pour centre l'origine, et l'on sait que le polynôme

$Mx^2+2Nxy+Py^2-A''F_1$ conserve un signe invariable, lorsqu'on remplace x et y par les coordonnées d'un point intérieur (ce signe est celui du terme $-A''F_1$); pour tous les points extérieurs le polynôme a un signe contraire. Si la quantité $-A''F_1$ est positive, tous les points de la surface se projettent à l'intérieur de l'ellipse; la surface est donc un ellipsoïde. Si $-A''F_1$ est négative, les points de la surface se projetteut en dehors de l'ellipse, et l'on a un hyperboloïdo à une nappe. Lorsque le lieu est imaginaire, la fonction $Mx^2+2Nxy+Py^2-A''F_1$ conserve un signe invariable pour tous les points du plan XOY (ce signe est celui du terme $-A''F_1$) et ne s'annule pas; si $-A''F_1$ est positive, la surface se compose de deux nappes indéfinies séparées par le plan diamétral; c'est un hyperboloïde à deux nappes; si $-A''F_1$ est négative, la valeur de z étant toujours imaginaire, l'équation (1) n'a pas de solutions réelles.

Supposons actuellement que l'équation (3) définisse un lieu du genre hyperbole; le terme $-A''F_1$ étant différent de zéro, le lieu est toujours une hyperbole, et non le système de deux droites. Si $-A''F_1$ est positive, tous les points de la surface se projettent entre les deux branches de l'hyperbole; la surface est donc un hyperboloïde à une nappe. Si $-A''F_1$ est négative, la surface est un hyperboloïde à deux nappes.

On peut remarquer que le signe de la quantité $-A''F_1$ indique si l'axe des z est un diamètre réel ou un diamètre imaginaire. Ce diamètre, joint à deux diamètres conjugués de la section, forme un système de trois diamètres conjugués de la surface qui permet de reconnaître immédiatement l'espèce de cette surface. Supposons que la section diamétrale soit une ellipse réelle; cette ellipse admet deux diamètres conjugués réels; si la quantité $-A''F_1$ est positive, le troisième diamètre étant aussi réel, la surface est un ellipsoïde; si cette quantité est négative, le troisième diamètre étant imaginaire, la surface est un hyperboloïde à une nappe. Lorsque la section est une ellipse imaginaire, elle admet deux diamètres conjugués imaginaires; si le troisième diamètre est réel, le lieu est un hyperboloïde à deux nappes; s'il est aussi imaginaire, le lieu

est un ellipsoïde imaginaire. Supposons maintenant que la section soit une hyperbole; de deux diamètres conjugués de cette hyperbole, l'un est réel, l'autre imaginaire; si le troisième diamètre est réel, la surface est un hyperboloïde à une nappe; s'il est imaginaire, la surface est un hyperboloïde à deux nappes.

Nous ferons encore remarquer que la section diamétrale est la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à la surface et ayant ses arêtes parallèles à l'axe des z.

Lorsque les trois coefficients A, A′, A″ sont nuls à la fois, l'équation se réduit à

$$(4)\quad 2Byz+2B'xz+2B''xy+F_1=0;$$

alors chacun des coefficients B, B′, B″ est différent de zéro; autrement la surface aurait une infinité de centres. La surface déterminée par l'équation (4) s'étend à l'infini, puisque z est réelle pour un couple quelconque de valeurs de x et de y; cette surface est l'une des deux hyperboloïdes. Le cône asymptote a pour équation

$$2Byz+2B'zx+2B''xy=0.$$

Les trois axes des coordonnées sont des arêtes du cône. Si la surface est un hyperboloïde à une nappe, on peut appliquer sur cette surface deux droites parallèles à OZ. Or, les équations d'une parallèle à OZ sont

$$(5)\quad x=\alpha,\quad y=\beta.$$

Pour avoir la coordonnée z du point de rencontre de la droite et de la surface, on élimine x et y entre les équations (4) et (5), on obtient ainsi l'équation

$$2z(B\beta+B'\alpha)+2B''\alpha\beta+F_1=0.$$

Pour que la surface soit un hyperboloïde à une nappe, il faut que l'on puisse choisir α et β de manière que l'équation précédente soit vérifiée quelle que soit z, c'est-à-dire de manière que l'on ait simultanément

$$B\beta+B'\alpha=0,\quad 2B''\alpha\beta+F_1=0.$$

De ces équations on déduit

$$\alpha^2=\frac{B^2F_1}{2BB'B''},\quad \beta=-\frac{B'\alpha}{B}.$$

La surface est un hyperboloïde à une nappe, si $\frac{F_1}{BB'B''}$ est positive, un hyperboloïde à deux nappes, si $\frac{F_1}{BB'B''}$ est négative.

2° La surface est dépourvue de centre. Cette surface ne peut être que l'un des paraboloïdes ou le cylindre parabolique. Si la surface est un paraboloïde, l'un au moins des trois plans coordonnés n'est pas parallèle à l'axe, et donnera une section, elliptique ou hyperbolique suivant que le paraboloïde est elliptique ou hyperbolique. Si la surface est un cylindre parabolique, les sections par les trois plans coordonnés sont des sections paraboliques.

3° La surface a pour centres tous les points d'une droite. La surface est un cylindre; l'un, au moins, des trois plans coordonnés n'est pas parallèle à son axe; la section du cylindre par ce plan détermine son espèce.

4° La surface a pour centres tous les points d'un plan. Dans ce cas le lieu est l'ensemble de deux plans parallèles, un plan unique, ou l'équation ne représente rien. Pour décider la question, on fait une section par l'un des plans coordonnés non parallèle au plan des centres.

Exemple I. $4x^2+3y^2+9z^2+8xz+4xy+4y+8z+9=0$.

Les équations qui déterminent le centre sont

$$2x+y+2z=0,$$
$$2x+3y+2=0,$$
$$4x+9z+4=0.$$

Ces équations admettent un système unique de solutions, $x=\frac{7}{2}$, $y=-3$, $z=-2$. Si l'on transporte l'origine au centre, le terme constant prend la valeur -5, et l'équation se réduit à

$$4x^2+3y^2+9z^2+8xz+4xy-5=0.$$

Résolvons celle-ci par rapport à x, on a

$$2x=-y-2z\pm\sqrt{-2y^2-5z^2+4yz+5}.$$

L'équation

$$-2y^2-5z^2+4yz+5=0$$

représente une ellipse réelle ; le terme constant sous le signe radical étant positif, la surface se projette sur le plan des yz à l'intérieur de l'ellipse ; la surface est un ellipsoïde.

Si l'on remplaçait, dans l'équation donnée, le terme constant 9 par 14, la nouvelle équation ainsi obtenue ne représenterait plus qu'un point. Si l'on remplaçait le terme constant par un nombre plus grand que 14, l'équation n'admettrait plus de solutions réelles.

Exemple II.

$$4x^2-15y^2+14yz+4zx-4xy+4x-34y+24z-18=0.$$

Les équations qui déterminent le centre sont

$$2x-y+z+1=0,$$
$$2x+15y-7z+17=0,$$
$$2x+7y+12=0.$$

Elles admettent un système unique de solutions, $x=-\frac{3}{4}$, $y=-\frac{3}{2}$, $z=-1$. Lorsqu'on transporte l'origine au centre, l'équation de la surface devient

$$4x^2+15y^2+14yz+4zx-4xy-6=0.$$

Celle-ci résolue par rapport à x donne

$$2x=y-z\pm\sqrt{z^2-14y^2-14yz+6}$$

L'équation

$$z^2-14y^2-14yz+6=0$$

représente une hyperbole ; le terme constant sous le signe radical est positif, par conséquent la surface est un hyperboloïde à une nappe.

Lorsqu'on remplace dans l'équation proposée le terme constant -18 par -12, on obtient une nouvelle équation qui représente un cône ; si l'on remplace le terme constant par un nombre plus grand que -12, on a un hyperboloïde à deux nappes.

Exemple III.

$$4x^2+4y^2+12z^2-12yz+4xy+4x+2y+3z=0.$$

Les équations qui déterminent le centre sont

$$(\alpha)\quad \begin{cases} 2x+y+1=0, \\ 2x+4y-6z+1=0, \\ 4y-8z-1=0. \end{cases}$$

Si l'on retranche la première de la seconde, on obtient l'équation

$$y-2z=0,$$

ou

$$4y-8z=0,$$

incompatible avec la troisième. L'équation proposée représente donc une surface dépourvue de centre. L'équation de la section de la surface par le plan des xy est

$$4x^2+4y^2+4xy+4x+2y=0;$$

cette section étant une ellipse, la surface est un paraboloïde elliptique. Les équations (α) représentent les plans diamétraux des cordes parallèles aux axes des coordonnées ; deux de ces plans se coupent suivant une droite dont les coefficients angulaires sont -1 et 2 ; la droite de rencontre de deux plans diamétraux étant parallèle à l'axe, il en résulte que l'axe a pour coefficients angulaires -1 et 2.

Le plan tangent au sommet du paraboloïde est perpendiculaire à l'axe ; lorsque les axes sont rectangulaires, les coordonnées de ce point doivent donc vérifier à la fois l'équation de la surface et les équations

$$\frac{f'_x}{-1}=\frac{f'_y}{2}=f'_z,$$

c'est-à-dire,

$$(\beta)\quad -(8x+4y+4)=2x+4y-6z+1=24z-12y+3.$$

Les équations (β) représentent une droite dont les coefficients angulaires sont encore -1 et 2 ; cette droite est par conséquent l'axe du paraboloïde.

Exemple IV.

$$4x^2-2y^2-12z^2+12yz+4xy+4x+2y+3z=0.$$

Les équations qui déterminent le centre sont

$$2x+y+1=0,$$
$$2x-2y+6z+1=0,$$
$$4y-8z+1=0.$$

Si l'on retranche la seconde de la première, on obtient

$$y-2z=0;$$

cette équation étant incompatible avec la troisième, la surface n'a pas de centre. Le plan des xy coupe la surface suivant une hyperbole définie par l'équation

$$4x^2-2y^2+4xy+4x+2y=0;$$

la surface est un paraboloïde hyperbolique. Si les coordonnées sont rectangulaires, les équations de l'axe sont

$$-(8x+4y+4)=-2y+6z+2x+1=-24z+12y+3.$$

Exemple V.

$$x^2+2y^2+4z^2-4yz-2xy+2x-2y-4=0.$$

Les équations qui déterminent le centre sont

$$x-y+1=0,$$
$$2y-2z-x-1=0,$$
$$y-2z=0.$$

En ajoutant les deux premières membre à membre, on obtient la troisième; donc la surface admet pour centres tous les points de la droite

$$x=2z-1,\quad y=2z;$$

sa trace sur le plan XOY est l'ellipse définie par l'équation

$$x^2+2y^2-2xy+2x-2y-4=0.$$

Ainsi, la surface est un cylindre elliptique.

TROISIÈME MÉTHODE.

567—Cette méthode est basée sur certaines transformations que l'on peut faire subir à une fonction du second degré à trois variables, et elle revient, comme nous le verrons, à une transformation des coordonnées. Dans ce qui suit, les lettres a, b, c, k désigneront des quantités constantes, et les lettres P, Q, R des fonctions linéaires d'une ou de plusieurs des variables x, y, z.

Considérons en premier lieu un polynôme du second degré à une seule variable x,

$$(1)\quad Ax^2+Bx+C;$$

le coefficient A étant différent de zéro, on peut écrire le polynôme

$$A\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+C-\frac{B^2}{4A},$$

et, par conséquent, le ramener à la forme

$$(2)\quad aP^2+k.$$

Soit maintenant un polynôme du second degré à deux variables

$$(3)\quad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F,$$

dans lequel nous supposerons d'abord que l'un des coefficients de x^2 et de y^2, C par exemple, n'est pas nul. Le polynôme (3), qui est du second degré par rapport à y, ordonné par rapport à cette variable, s'écrit

$$Cy^2+(Bx+E)y+Ax^2+Dx+F.$$

Si on lui fait subir la transformation précédente, il devient

$$C\left(y+\frac{Bx+E}{2C}\right)^2+Ax^2+Dx+F-\frac{(Bx+E)^2}{4C}.$$

La seconde partie $Ax^2+Dx+F-\frac{(Bx+E)^2}{4C}$ est un polynôme en x, au plus du second degré, ou une constante. Si elle est du second degré, on la mettra sous la forme bQ^2+k; il en résulte que, lorsque C n'est pas nul, on peut réduire le polynôme (3) à l'une des formes

$$(4)\quad aP^2+bQ^2+k,$$
$$(5)\quad aP^2+Q,$$
$$(6)\quad aP^2+k.$$

Lorsque A et C sont nuls à la fois, B est nécessairement différent de zéro, et l'on a

$$Bxy+Dx+Ey+F=x\left(By+D\right)+Ey+F$$
$$=\left(x+\frac{E}{B}\right)\left(By+D\right)+F-\frac{DE}{B};$$

le polynôme prend la forme

$$(7)\quad PQ+k.$$

Il est bon de remarquer que la forme (7) se ramène à la forme (4); car on a identiquement

$$PQ+k=\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P-Q}{2}\right)^2+k.$$

Les polynômes $\frac{P+Q}{2}$, $\frac{P-Q}{2}$ contiennent toutefois les deux variables x et y, tandis que dans le polynôme (4) la fonction Q ne renferme que la variable x.

Considérons enfin un polynôme à trois variables

$$(8)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F,$$

et supposons que l'un des carrés, z^2 par exemple, ait son coefficient différent de zéro. Ordonné par rapport à z, le polynôme s'écrit

$$A''z^2+2(By+B'x+C'')z+Ax^2+A'y^2+2B''xy+2Cx+2C'y+F,$$

ou

$$A''\left(z+\frac{By+B'x+C''}{A''}\right)^2+Ax^2+A'y^2+2B''xy+2Cx+2C'y+F-\frac{(By+B'x+C'')^2}{A''}.$$

La seconde partie est un polynôme au plus du second degré par rapport aux variables x et y; si elle est du second degré, on peut la mettre sous l'une des formes (4), (5), (6), il en résulte que le polynôme (8) prendra l'une des formes

$$(9)\quad aP^2+bQ^2+cR^2+k,$$
$$(10)\quad aP^2+bQ^2+R,$$
$$(11)\quad aP^2+bQ^2+k,$$
$$(12)\quad aP^2+Q,$$
$$(13)\quad aP^2+k.$$

Lorsque les trois coefficients A, A′, A″ sont nuls à la fois, l'un au moins des coefficients B, B′, B″, par exemple B, est différent de zéro; alors on a

$$\begin{aligned}&2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F\\&=z(2By+2B'x+2C'')+2B''xy+2Cx+2C'y+F\\&=\left(z+\frac{B''}{B}x+\frac{C'}{B}\right)(2By+2B'x+2C'')+2Cx+F\\&\quad-\frac{2B'B''}{B}x^2-\frac{2B''C'}{B}x-\frac{2B'C'}{B}x-\frac{2C'C''}{B}.\end{aligned}$$

La seconde partie étant un polynôme en x qui est au plus du second degré, le polynôme proposé peut être ramené à l'une des formes

$$(14)\quad PQ + cR^2 + k,$$
$$(15)\quad PQ + R,$$
$$(16)\quad PQ + k.$$

Si l'on remplace le produit PQ par $\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P-Q}{2}\right)^2$, les formes (14), (15), (16) se ramènent aux formes (9), (10), (11).

568—Cela posé, lorsque l'on donne une équation numérique du second degré, on commence par ramener le premier membre de cette équation à l'une des formes précédentes, et il est facile d'en déduire l'espèce de la surface. Considérons, par exemple, le cas où l'équation peut s'écrire sous la forme

$$(17)\quad aP^2 + bQ^2 + cR^2 + k = 0.$$

Imaginons que l'on effectue une transformation de coordonnées en prenant pour plans des $y'z'$ des $z'x'$, et des $x'y'$ les plans définis par les équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0.$$

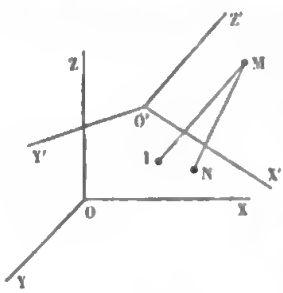


Fig. 274.

D'un point quelconque M de l'espace (fig. 274) abaissons une perpendiculaire MN sur le plan X'O'Y' et menons MI parallèle à OZ'; désignons par x, y, z les anciennes coordonnées du point M, par x', y', z' les coordonnées nouvelles, par γ' l'angle des deux droites MN, MI, angle qui est le même pour tous les points de l'espace, et soit enfin $R = mx + ny + pz + q$. La perpendiculaire MN a pour expression dans le premier système de coordonnées (nº 422)

$$MN = \pm \frac{mx + ny + pz + q}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} = \frac{\pm R}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

et dans le second

$$MN = \pm z' \cos \gamma'.$$

Dans chacune des formules le signe du second membre change lorsque le point M passe d'un côté du plan X'OY' à l'autre; si donc on appelle h la valeur du produit $\cos\gamma'\sqrt{m^2+n^2+p^2}$, prise avec un signe convenable, on aura pour tous les points de l'espace la relation $R=hz'$. On démontrerait de même les relations $Q=gy'$, $P=fx'$. Il en résulte que l'équation de la surface, par rapport aux nouveaux axes, est

$$(18)\quad af^2x'^2+bg^2y'^2+ch^2z'^2+k=0.$$

La surface est une surface à centre unique, et les nouveaux plans des coordonnées sont trois plans diamétraux conjugués. L'espèce de la surface est déterminée immédiatement d'après les signes des nombres a, b, c, k.

569—Remarque I. La transformation des coordonnées suppose que les plans définis par les équations $P=0$, $Q=0$, $R=0$ se coupent en un point unique. Cette condition peut n'être pas remplie, lorsque les fonctions linéaires P, Q, R sont prises arbitrairement; mais elle est toujours satisfaite, lorsque ces polynômes proviennent de la transformation d'une fonction du second degré d'après la méthode indiquée.

Remarque II. Supposons a et b positifs, c et k négatifs, l'équation (17) représentera un hyperboloïde à une nappe. Si l'on pose $c=-c_1$, $k=-k_1$, l'équation de la surface rapportée aux axes primitifs peut s'écrire

$$(19)\quad aP^2-c_1R^2=k_1-bQ^2.$$

Les valeurs de x, y, z qui satisfont aux deux équations simultanées

$$(20)\quad \begin{cases} P\sqrt{a}+R\sqrt{c_1}=\lambda[\sqrt{k_1}+Q\sqrt{b}], \\ P\sqrt{a}-R\sqrt{c_1}=\frac{1}{\lambda}[\sqrt{k_1}-Q\sqrt{b}], \end{cases}$$

dans lesquelles λ désigne un paramètre arbitraire, vérifient l'équation (19), quel que soit λ; or, pour chaque valeur de λ, les équations (20) représentent une droite; on a de la sorte un premier système de génératrices rectilignes de la surface. Les équations des génératrices du second système sont

$$(21)\quad \begin{cases} P\sqrt{a}+R\sqrt{c_1}=\mu[\sqrt{k_1}-Q\sqrt{b}], \\ P\sqrt{a}-R\sqrt{c_1}=\frac{1}{\mu}[\sqrt{k_1}+Q\sqrt{b}]. \end{cases}$$

570—Lorsque le premier membre de l'équation se réduit à la forme (10), on reconnaît par la même transformation que la surface est un paraboloïde, elliptique ou hyperbolique suivant que a et b ont le même signe ou des signes contraires. Dans ce dernier cas, si l'on suppose a positif, b négatif et égal à $-b_1$, on voit que les deux systèmes de génératrices rectilignes sont défluis par les équations

$$(22)\quad \begin{cases} P\sqrt{a}+Q\sqrt{b_1}=\lambda, \\ P\sqrt{a}-Q\sqrt{b_1}=-\frac{R}{\lambda}. \end{cases}$$

et

$$(23)\quad \begin{cases} P\sqrt{a}-Q\sqrt{b_1}=\mu, \\ P\sqrt{a}+Q\sqrt{b_1}=-\frac{R}{\mu}. \end{cases}$$

Lorsque le premier membre se réduit à la forme (11), en prenant pour nouveaux plans des coordonnées les deux plans $P=0$, $Q=0$, et un troisième non parallèle à la rencontre des deux premiers, on voit que le lieu est un cylindre, elliptique ou hyperbolique. La forme (12) correspond au cylindre parabolique, et la forme (13) au système de deux plans parallèles.

Les formes (14), (15), (16) se ramènent aux précédentes; mais cette réduction n'est pas nécessaire. On voit directement que la forme (14) donne, un hyperboloïde à une nappe si c et k ont des signes contraires, un hyperboloïde à deux nappes s'ils ont le même signe. Dans le premier cas, soit c positif, k négatif et égal à $-k_1$; les équations des deux systèmes de génératrices rectilignes de la surface sont

$$(24)\quad \begin{cases} R\sqrt{c}+\sqrt{k_1}=\lambda P, \\ R\sqrt{c}-\sqrt{k_1}=-\frac{Q}{\lambda}. \end{cases}$$

et

$$(25)\quad \begin{cases} R\sqrt{c}-\sqrt{k_1}=\mu P, \\ R\sqrt{c}+\sqrt{k_1}=-\dfrac{Q}{\mu}. \end{cases}$$

La forme (15) correspond au paraboloïde hyperbolique; les génératrices rectilignes sont définies par les deux systèmes

$$(26)\quad \begin{cases} P=\lambda, \\ Q=-\dfrac{R}{\lambda}, \end{cases}$$

et

$$(27)\quad \begin{cases} P=-\dfrac{R}{\mu}, \\ Q=\mu. \end{cases}$$

Enfin la forme (16) donne un cylindre hyperbolique.

571—Dans ce qui précède nous avons supposé les axes rectangulaires; néanmoins, d'après la remarque du n° 565, les conclusions, auxquelles nous avons été conduits, subsistent encore, si les axes sont obliques. On pourrait, du reste, appliquer la même méthode de transformation de coordonnées, et l'on reconnaît sans peine que la formule

$$R=\pm z' \cos\gamma' \sqrt{m^2+n^2+p^2},$$

doit être remplacée par la suivante

$$R=\pm z' \frac{\cos\gamma'}{\cos\gamma} p,$$

γ et γ' étant les angles que la normale au plan $R=0$, fait avec les axes OZ et OZ'; il en résulte, comme dans le premier cas, $R=hz'$, h étant une constante.

Exemple I.

$$4x^2+3y^2+9z^2+8xz+4xy+4y+8z+9=0.$$

Le premier membre de l'équation, ordonné par rapport à x, s'écrit

$$4x^2+4x(y+2z)+3y^2+9z^2+4y+8z+9,$$

ou

$$(2x+y+2z)^2-(y+2z)^2+3y^2+9z^2+4y+8z+9$$

et, en faisant les réductions dans la seconde partie,

$$(2x+y+2z)^2+2y^2+5z^2-4yz+4y+8z+9.$$

La seconde partie, ordonnée par rapport à y, devient

$$2y^2-4y(z-1)+5z^2+8z+9$$
$$=2(y-z+1)^2-2(z-1)^2+5z^2+8z+9.$$

Enfin la dernière partie de ce nouveau polynôme est

$$3z^2+12z+7=3(z+2)^2-5.$$

Il résulte de ce qui précède que l'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$(2x+y+2z)^2+2(y-z+1)^2+3(z+2)^2-5=0.$$

Cette équation représente un ellipsoïde, et les trois plans définis par les équations

$$2x+y+2z=0,$$
$$y-z+1=0,$$
$$z+2=0,$$

sont trois plans diamétraux conjugués de la surface. Ces plans se coupent au point $x=\frac{7}{2}$, $y=-3$, $z=-2$, qui est le centre de la surface.

Exemple II.

$$4x^2-15y^2+14yz+4zx-4xy+4x-34y+24z-18=0.$$

On a successivement

$$4x^2-15y^2+14yz+4zx-4xy+4x-34y+24z-18$$
$$=4x^2+4x(z-y+1)-15y^2+14yz-34y+24z-18$$
$$=(2x-y+z+1)^2-16y^2+16yz-z^2-32y+22z-19;$$

puis

$$-16y^2+16y(z-2)-z^2+22z-19$$
$$=-4(2y-z+2)^2+3z^2+6z-3;$$

et enfin

$$3z^2+6z-3=3(z+1)^2-6.$$

L'équation proposée prend la forme

$$(2x-y+z+1)^2-4(2y-z+2)^2+3(z+1)^2-6=0;$$

elle représente un hyperboloïde à une nappe. Les équations des deux systèmes de génératrices rectilignes de la surface sont

$$\begin{cases} 2x+3y-z+5=\lambda[\sqrt{6}+(z+1)\sqrt{3}], \\ 2x-5y+3z-3=\frac{1}{\lambda}[\sqrt{6}-(z+1)\sqrt{3}], \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} 2x+3y-z+5=\mu[\sqrt{6}-(z+1)\sqrt{3}], \\ 2x-5y+3z-3=\frac{1}{\mu}[\sqrt{6}+(z+1)\sqrt{3}]. \end{cases}$$

L'équation du cône asymptote est

$$(2x-y+z+1)^2-4(2y-z+2)^2+3(z+1)^2=0.$$

Exemple III.

$$4x^2+4y^2+12z^2-12yz+4xy+4x+2y+3z=0.$$

On a

$$4x^2+4x(y+1)+4y^2+12z^2-12yz+2y+3z$$
$$=(2x+y+1)^2+3y^2+12z^2-12yz+3z-1,$$

puis

$$3y^2+12z^2-12yz+3z-1=3(y-2z)^2+3z-1.$$

L'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$(2x+y+1)^2+3(y-2z)^2+3z-1=0;$$

elle représente un paraboloïde elliptique.

Exemple IV.

$$4x^2-2y^2-12z^2+12yz+4xy+4x+2y+3z=0.$$

L'équation se met sous la forme

$$(2x+y+1)^2-3(y-2z)^2+3z-1=0;$$

elle représente un paraboloïde hyperbolique.

Les deux systèmes de génératrices rectilignes de la surface sont donnés par les équations

$$\begin{cases} 2x+y+1+(y-2z)\sqrt{3}=\lambda, \\ 2x+y+1-(y-2z)\sqrt{3}=\frac{1}{\lambda}(1-3z); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y+1+(y-2z)\sqrt{3}=\mu'(1-3z), \\ 2x+y+1-(y-2z)\sqrt{3}=\frac{1}{\mu'}. \end{cases}$$

Exemple V.

$$x^2+4y^2+z^2-4yz-2zx+4xy+6x+4y-5z+3=0.$$

Ordonné par rapport à x, le premier membre s'écrit

$$x^2+2x(2y-z+3)+4y^2+z^2-4yz+4y-5z+3$$
$$=(x+2y-z+3)^2-8y+z-6,$$

et l'équation proposée prend la forme

$$(x+2y-z+3)^2-8y+z-6=0;$$

elle représente un cylindre parabolique; les arêtes du cylindre sont parallèles à la droite déterminée par les deux équations

$$x+2y-z+3=0,$$
$$8y-z+6=0.$$

CHAPITRE VII.

Des conditions nécessaires pour définir une surface du second degré.

572—L'équation générale du second degré

$$(1)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F=0,$$

entre les trois variables x, y, z, renferme dix termes, et la surface définie par cette équation dépend de neuf paramètres arbitraires, les rapports de neuf coefficients au dixième. Il faut donc neuf conditions géométriques pour définir une surface du second degré, en supposant que chaque condition géométrique s'exprime par une relation unique entre les coefficients. Ainsi, par exemple, une surface du second degré est déterminée par neuf points.

573—Pour exprimer qu'un plan

$$(\alpha)\quad Ax+By+Cz+D=0$$

est tangent à une surface

$$(\alpha')\quad F(x, y, z)=0,$$

on observe que les coordonnées x, y, z du point de contact doivent vérifier à la fois les équations de la surface et du plan.

De plus, les cosinus des angles que fait la normale à la surface au point x, y, z avec les trois axes des coordonnées sont proportionnels à $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$; on doit donc avoir

$$(\alpha'') \quad \frac{F'_x}{A} = \frac{F'_y}{B} = \frac{F'_z}{C}.$$

L'élimination de x, y, z entre les équations (α), (α'), (α'') donne une relation entre les coefficients variables renfermés dans l'équation de la surface. Puisque le contact d'un plan et d'une surface quelconque s'exprime par une seule équation, il faut également neuf plans tangents pour déterminer une surface du second degré.

574—Pour qu'une droite

$$(\beta) \quad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$$

soit située entièrement sur la surface (α'), il faut que l'équation que l'on obtient par l'élimination de x et z entre les équations (α') et (β) soit vérifiée quelle que soit z. Si l'équation (α') est algébrique et du degré m, la condition précédente donne $m+1$ relations entre les paramètres variables de la surface. On arrive à la même conclusion, d'une autre manière, en observant que, pour que la droite appartienne à la surface, il faut et il suffit que les coordonnées de $m+1$ de ses points vérifient l'équation de cette surface. En particulier, si la surface est du second degré, une droite équivaut à trois conditions, et trois droites déterminent la surface. Si, parmi les points donnés, quatre ou un plus grand nombre sont sur une même droite, ces points ne devront être comptés que pour trois.

575—Supposons que l'on donne neuf points; cinq dans un plan P et les quatre autres dans un plan P′ qui rencontre le premier suivant la droite D. L'ensemble des deux plans P et P′ constitue un lieu du second degré renfermant les neuf points; généralement il n'y en a pas d'autre. Car si le plan P n'appartient pas au lieu, il le coupe suivant une ligne du

second degré C complétement déterminée par les cinq points renfermés dans ce plan. La droite D coupe la ligne C en deux points qui devraient être avec les quatre points du plan P′ sur une même ligne du second degré, ce qui n'a pas lieu en général, lorsque les quatre derniers points sont pris arbitrairement dans le plan P′. Cependant, si cette dernière condition était satisfaite, outre la première solution, il y en aurait une infinité d'autres, et les neuf points ne devraient compter que pour huit. Prenons, en effet, les plans P et P′ pour plans des xy et des xz, et un troisième plan quelconque pour plan des yz. Soient

$$ax^2+a'y^2+2b''xy+2cx+2c'y+f=0,$$
$$ax^2+a''z^2+2b'xz+2cx+2c''z+f=0$$

les équations des lignes C et C′ du second degré qui passent d'une part, par les cinq points du plan P, d'autre part, par les quatre points du plan P′ et les deux points de rencontre de la droite D et de la courbe C. On peut supposer que le coefficient de x^2 est le même dans les deux équations, et comme l'axe des x rencontre les courbes aux mêmes points, les coefficients de x et les termes constants doivent aussi être les mêmes. Pour que la surface définie par l'équation (1), dans laquelle on suppose $A=a$, soit coupée par les plans des xy et des xz suivant les deux courbes précédentes, il faut et il suffit que l'on ait

$$A=a, A'=a', A''=a'', B'=b', B''=b'', C=c, C'=c', C''=c'', F=f.$$

L'équation

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2Byz+2b'zx+2b''xy+2cx+2c'y+2c''z+f=0$$

renferme encore un paramètre arbitraire B, que l'on peut choisir de manière que la surface passe par un point quelconque donné en dehors des deux plans XOY, XOZ.

576—Lorsque, parmi les neuf points donnés, six sont dans un même plan P, le lieu est en général l'ensemble de deux plans, savoir le plan P et le plan P′ qui passe par les trois autres points. Cependant, si les six points étaient sur une

conique, on verrait, comme dans le cas précédent, que, outre cette solution, il y en aurait une infinité d'autres, déterminées chacune par un nouveau point pris en dehors des deux plans.

Lorsque sept des neuf points sont dans un même plan P, si ces sept points ne sont pas sur une même ligne du second degré, le lieu est l'ensemble du plan P et d'un second plan mené arbitrairement par la droite qui joint les deux autres points. Mais si les sept points sont sur une même courbe du second degré, outre ces solutions, il y en a d'autres, déterminées chacune par deux points arbitraires. Les cas, dans lesquels huit ou neuf points sont dans un même plan, donnent lieu à des remarques analogues.

577—Considérons deux surfaces du second degré définies par les deux équations

$$(1)\quad F(x, y, z)=0,$$
$$(2)\quad f(x, y, z)=0.$$

L'équation

$$(3)\quad F+\lambda f=0$$

représente, quelle que soit la valeur de λ, une surface du second degré qui passe par la courbe d'intersection des deux premières surfaces. On peut choisir λ de manière que la surface (3) passe par un point quelconque M pris en dehors des surfaces (1) et (2). D'ailleurs, il est facile de s'assurer qu'il n'existe qu'une surface du second degré passant par le point M et la courbe d'intersection des surfaces (1) et (2). Supposons, en effet, que deux surfaces S et S′ satisfassent à ces conditions; menons par le point M un plan quelconque P; ce plan coupera les surfaces (1) et (2) suivant deux lignes du second degré ayant quatre points communs; il coupera aussi les deux surfaces S et S′ suivant deux lignes du second degré passant par les quatre points communs aux deux premières et par le point M; mais ces quatre points et le point M déterminent complétement une ligne du second degré. Les deux surfaces S et S′, étant coupées suivant la même courbe par tout plan mené par le point M, coïncident. Ainsi, *la ligne de rencontre de deux surfaces du second degré et un point déterminent complétement une surface*

du second degré; en d'autres termes, *l'équation* (3) *est l'équation générale des surfaces du second degré qui passent par la courbe d'intersection des surfaces* (1) *et* (2).

578—On peut supposer que l'une des équations (1) et (2) représente deux plans, alors son premier membre est le produit de deux fonctions du premier degré P et Q des variables x, y, z. Donc *l'équation*

$$(4)\quad F+\lambda PQ=0$$

représente toutes les surfaces du second degré qui passent par les sections faites dans la surface (1) *par les deux plans* $P=0$, $Q=0$.

Par la même raison *l'équation*

$$(5)\quad PQ+\lambda RS=0$$

est l'équation générale des surfaces du second degré qui passent par les quatre droites d'intersection des plans $P=0$, $Q=0$, *avec les plans* $R=0$, $S=0$.

579—La ligne d'intersection de deux surfaces du second degré est généralement une courbe gauche, sur laquelle on peut, d'une infinité de manières différentes, prendre neuf points, de telle sorte que trois d'entre eux ne soient pas en ligne droite, ni quatre dans un même plan, et par ces neuf points on peut toujours faire passer une infinité de surfaces du second degré. Ainsi, lorsqu'on demande de faire passer une surface du second degré par neuf points donnés, ce n'est pas en examinant combien il y a de ces points sur une même droite ou dans un même plan que l'on pourra décider si le problème admet une ou plusieurs solutions.

580—Considérons deux surfaces du second degré ayant cinq points communs dans un même plan P; ces cinq points déterminent une courbe du second degré C, qui appartient aux deux surfaces. Prenons trois points communs aux surfaces, non compris dans le plan P, et par ces trois points imaginons un plan P′; le plan P′ coupe la courbe C en deux points qui, avec les trois premiers, déterminent une courbe du second

degré C′, également commune aux deux surfaces. Les deux surfaces ne peuvent pas avoir un nouveau point commun, non situé sur les courbes C et C′, sans quoi elles coïncideraient (nº 575).

Ainsi, *lorsque la ligne d'intersection de deux surfaces du second degré a cinq points dans un même plan, cette ligne se compose de deux courbes planes.*

581—Considérons deux surfaces du second degré qui se touchent en deux points A et B. Soit C un troisième point commun aux deux surfaces; par les trois points A, B, C faisons passer un plan P; ce plan coupera chacune des surfaces suivant une courbe du second degré; ces deux courbes ont trois points communs A, B, C, et les mêmes tangentes en deux points A et B; donc elles se confondent. Car nous avons vu (nº 270) qu'il n'y a qu'une courbe du second degré remplissant ces conditions. Puisque le plan P coupe les deux surfaces suivant la même courbe, il résulte du théorème précédent que la ligne d'intersection des deux surfaces est formée de deux courbes planes. Ainsi, *deux surfaces du second degré, qui se touchent en deux points, se coupent suivant deux courbes planes, et les plans des deux courbes se coupent suivant la droite qui joint les points de contact donnés.*

La démonstration précédente suppose que les plans tangents en A et B ne se coupent pas suivant AB, c'est-à-dire que les points donnés n'appartiennent pas à une droite située sur la surface. Dans ce cas, nous verrons qu'en général la ligne d'intersection se compose d'une ligne droite et d'une ligne gauche dont la projection sur un plan est du troisième degré.

582—Considérons enfin deux surfaces du second degré qui se touchent en trois points A, B, C; d'après le dernier théorème, tout point commun aux deux surfaces doit se trouver dans un même plan avec chacune des cordes AB, BC, CA; les surfaces n'ont donc pas de point commun en dehors du plan P déterminé par les points A, B, C. Ce plan P coupe les deux sur-

faces suivant une même courbe S, et les deux surfaces ont le même plan tangent en chaque point D de la courbe. En effet, par le point D et le point A, par exemple, menons un plan quelconque différent du plan P, ce plan coupe les deux surfaces suivant deux courbes qui passent en A et D; ces deux courbes sont tangentes en A, et, comme elles n'ont pas d'autre point commun que le point D, elles sont aussi tangentes en ce point. Ainsi, *lorsque deux surfaces du second degré se touchent en trois points, elles sont tangentes en tous les points d'une ligne plane située dans le plan des trois points.*

583—Nous avons vu que l'équation

$$F+\lambda PQ=0$$

représente une surface du second degré qui passe par les courbes d'intersection de la surface $F=0$ avec les plans $P=0$, $Q=0$. Il en résulte que les surfaces représentées par l'équation

$$(6)\quad F+\lambda P^2=0$$

sont tangentes à la surface $F=0$ suivant la courbe d'intersection C de cette surface et du plan $P=0$.

L'équation (6) renferme un paramètre arbitraire λ qui permet de faire passer la surface par un point arbitraire; d'autre part on démontre, comme au n° 577, qu'une surface, qui doit être tangente à une surface du second degré en tous les points d'une courbe plane et passer par un point donné, est complétement déterminée. On peut donc regarder l'équation (6) comme l'équation générale des surfaces du second degré qui touchent la surface (1) aux points où elle est coupée par le plan $P=0$.

Si l'on a deux surfaces du second degré circonscrits à une même surface du second degré $F=0$, ces deux surfaces sont représentées par des équations de la forme

$$F+\lambda P^2=0,$$
$$F+\lambda' P'^2=0;$$

elles se coupent suivant deux courbes du second degré situées dans les plans

$$P=\pm\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}}\cdot P'.$$

584—Cherchons, comme application, l'équation du cône circonscrit à un ellipsoïde

$$(7)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

et ayant pour sommet un point donné P dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1.

L'équation du plan tangent à l'ellipsoïde au point x, y, z est

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}-1=0.$$

Pour que ce plan passe au point P, il faut que les coordonnées x_1, y_1, z_1 vérifient la condition

$$(8)\quad \frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}-1=0.$$

La courbe définie par les équations (7) et (8) est la courbe de contact du cône et de l'ellipsoïde ; l'équation générale des surfaces du second degré qui touchent l'ellipsoïde suivant cette courbe plane est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1+\lambda\left(\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}-1\right)^2=0.$$

Si l'on prend λ de manière que l'équation précédente soit vérifiée par les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point P, elle représentera le cône circonscrit, puisqu'il n'existe qu'une surface du second degré tangente à l'ellipsoïde suivant la courbe considérée et passant par un point donné ; on obtient ainsi l'équation demandée

$$(9)\quad \left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c^2}-1\right]\left[\frac{x_1^2}{a}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right]-\left[\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}-1\right]^2=0.$$

585—On sait que l'élimination de z entre deux équations du second degré à trois inconnues x, y, z conduit, en général, à une équation du quatrième degré entre x et y. Ainsi, *la ligne d'intersection de deux surfaces du second degré se projette généralement sur un plan suivant une courbe du quatrième degré.* Certains cas font exception. Considérons deux surfaces du second degré qui ont le même plan diamétral pour une même série de cordes ; si l'on prend ce plan diamétral pour plan des

xy et une parallèle aux cordes pour axe des z, les équations des deux surfaces auront la forme

$$Az^2+P=0, \quad A'z^2+P'=0,$$

P et P′ désignant deux polynômes du second degré qui ne renferme que les deux variables x et y. L'élimination de z entre les deux équations précédentes, donne une équation du second degré

$$A'P-AP'=0.$$

Ainsi, *lorsque deux surfaces du second degré ont un même plan diamétral pour une certaine série de cordes, la projection de leur ligne d'intersection sur ce plan, faite parallèlement aux cordes considérées, est une courbe du second degré.*

Lorsque les deux surfaces ont une génératrice rectiligne commune, la ligne d'intersection des deux surfaces se projette sur un plan quelconque suivant une ligne droite et une courbe du troisième degré.

586—Soient

$$F(x,y,z)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$
$$f(x,y,z)=ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy+2cx+2c''z+d=0,$$

les équations de deux surfaces du second degré. Toute surface passant par la ligne d'intersection des deux premières est représentée par l'équation

$$(10) \quad F+\lambda f=0.$$

On peut se proposer de déterminer le paramètre λ de manière que cette nouvelle surface soit un cône. Si l'on considère un cône comme une surface dont le centre appartient à la surface, on a les équations

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} F'_x+\lambda f'_x=0, \\ F'_y+\lambda f'_y=0, \\ F'_z+\lambda f'_z=0, \end{array} \right.$$

qui, jointes à l'équation (10), détermineront les coordonnées du centre et le paramètre λ. Si l'on multiplie le équations (11) respectivement par $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$, $\frac{z}{2}$, que l'on ajoute et que l'on retranche de l'équation (10), on a l'équation

$$(12)\quad Cx+B'y+C''z+D+\lambda(cx+c'y+c''z+d)=0.$$

En tirant des équations (10) les valeurs de x, y, z, et substituant dans l'équation (11), on arrive à une équation du quatrième degré en λ. On conclut de là que *par la ligne d'intersection de deux surfaces du second degré on peut faire passer quatre cônes du second degré.*

Si l'on considère les sections d'une surface du second degré $f=0$ par les deux plans $P=0$, $Q=0$, toute surface du second degré passant par ces deux courbes est représentée par l'équation

$$(13)\quad PQ+\lambda f=0.$$

Il est clair que le système des deux plans $PQ=0$ forme un premier cône du second degré passant par les deux courbes. Cette première solution correspond à une racine double $\lambda=0$ de l'équation du quatrième degré en λ, qui s'abaisse ainsi au second degré. Pour simplifier le calcul, prenons les deux plans pour plans des yz et des xz; l'équation (13) devient

$$xy+\lambda f=0,$$

et les équations (11) et (12) se réduisent à

$$y+\lambda f'_x=0,$$
$$x+\lambda f'_y=0,$$
$$f'_z=0,$$
$$cx+c'y+c''z+d=0,$$

Si des deux dernières on tire les valeurs de x et y en fonction de z, qu'on les substitue dans les deux premières, et qu'on élimine ensuite z, on arrivera évidemment à une équation du second degré en λ. Ainsi, *par deux sections planes d'une surface du second ordre, on peut faire passer deux cônes du second degré.*

EXERCICES.

1° On mène des normales à un ellipsoïde par les différents points d'une section plane; trouver le lieu de la trace de ces normales sur l'un des plans principaux. Examiner le cas où le plan de la section est perpendiculaire au plan principal.

2° Etant donné un ellipsoïde, on mène des plans diamé-

traux qui coupent le solide suivant une ellipse d'aire constante; trouver le lieu : 1° de la perpendiculaire menée par le centre à ce plan ; 2° du diamètre conjugué.

3° L'œil étant placé en un point de la surface d'un ellipsoïde, les perspectives de toutes les sections planes de la surface sur le plan diamétral conjugué du rayon qui aboutit à l'œil, sont des courbes homothétiques; le centre de chacune d'elles est la perspective du sommet du cône circonscrit à l'ellipsoïde suivant la section plane considérée.

4° Démontrer que le lieu de la droite d'intersection de deux plans rectangulaires menés par deux droites données, est un hyperboloïde à une nappe dont les sections circulaires sont perpendiculaires à chacune des deux droites données.

5° Un cône a pour sommet un point d'un hyperboloïde de révolution à une nappe et pour base le cercle de gorge; démontrer que les sections anti-parallèles de ce cône sont perpendiculaires au plan du cercle de gorge.

6° Les quatre perpendiculaires abaissées des sommets d'un tetraèdre sur les faces opposées sont situées sur un hyperboloïde à une nappe. Le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre, le centre de gravité du tétraèdre et le centre de l'hyperboloïde sont en ligne droite.

7° Trouver le lieu des points tels que le rapport des distances de chacun d'eux à deux droites données soit constant. Déterminer ensuite, pour une surface du second degré susceptible de ce mode de génération, les divers couples de droites que l'on peut employer.

9° Le lieu des normales à une surface réglée quelconque le long d'une même génératrice est un paraboloïde hyperbolique.

10° Étant donné un point et deux plans rectangulaires, trouver le lieu des points tels que la distance de chacun d'eux au point fixe soit moyenne proportionnelle entre ses distances aux deux plans fixes.

11° Par une génératrice d'un paraboloïde hyperbolique on mène un plan perpendiculaire au plan directeur auquel cette

génératrice est parallèle ; ce plan est tangent à la surface en un point de la génératrice que l'on appelle le point central de la génératrice; trouver le lieu de ce point pour les génératrices du même système. (Ce lieu est la ligne de striction de la surface.)

12° Par une génératrice d'un hyperboloïde à une nappe on mène un plan tangent au cône asymptote et au plan perpendiculaire au précédent ; ce dernier touche la surface en un point qu'on appelle point central de la génératrice; trouver le lieu du point central ou la ligne de striction de la surface.

13° Par un point O pris sur l'arête d'un angle dièdre, on mène dans l'une des faces une droite OA et dans la seconde face une droite OB perpendiculaire à OA; trouver le lieu de la perpendiculaire menée par le point O au plan AOB.

14° Indiquer les diverses surfaces représentées par l'équation

$$x^2+(2m^2+1)(y^2+z^2)-2(yz+zx+xy)=2m^3-3m+1,$$

quand on donne au paramètre m toutes les valeurs possibles.

15° Étant donné un cercle et deux points fixes A et B dans l'espace; par le point B et la droite des contacts relative à un point quelconque P du plan du cercle, on mène un plan; trouver le lieu du point d'intersection de ce plan avec la droite AP.

16° Lorsque deux surfaces du second degré passent par deux droites non situées dans un même plan, l'intersection des deux surfaces se compose de ces droites et de deux autres droites, réelles ou imaginaires.

17° Lorsque deux surfaces du second degré se raccordent suivant une même génératrice, il y a en général sur cette génératrice deux points tels que la seconde génératrice qui passe par chacun d'eux est la même sur les deux surfaces.

18° Les perspectives sur un même plan des sections planes d'une surface du second degré ont un double contact réel ou imaginaire avec le contour apparent de la surface.

19° Étant données les trois équations

$$\frac{x^2}{a^2-p^2}+\frac{y^2}{b^2-p^2}+\frac{z^2}{c^2-p^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2-q^2}+\frac{y^2}{b^2-q^2}+\frac{z^2}{c^2-q^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2-r^2}+\frac{y^2}{b^2-r^2}+\frac{z^2}{c^2-r^2}=1,$$

dans lesquelles on suppose $a>b>c$, $p<c$, $c<q<b$, $b<r<a$, et qui représentent, la première un ellipsoïde la seconde un hyperboloïde à une nappe, la troisième un hyperboloïde à deux nappes; démontrer : 1° que ces surfaces se coupent deux à deux à angle droit; 2° les deux courbes suivant lesquelles une des surfaces est coupée par les deux autres ont pour tangentes en leur point d'intersection des droites parallèles aux axes de la section faite dans la première surface par un plan parallèle au plan tangent en ce point.

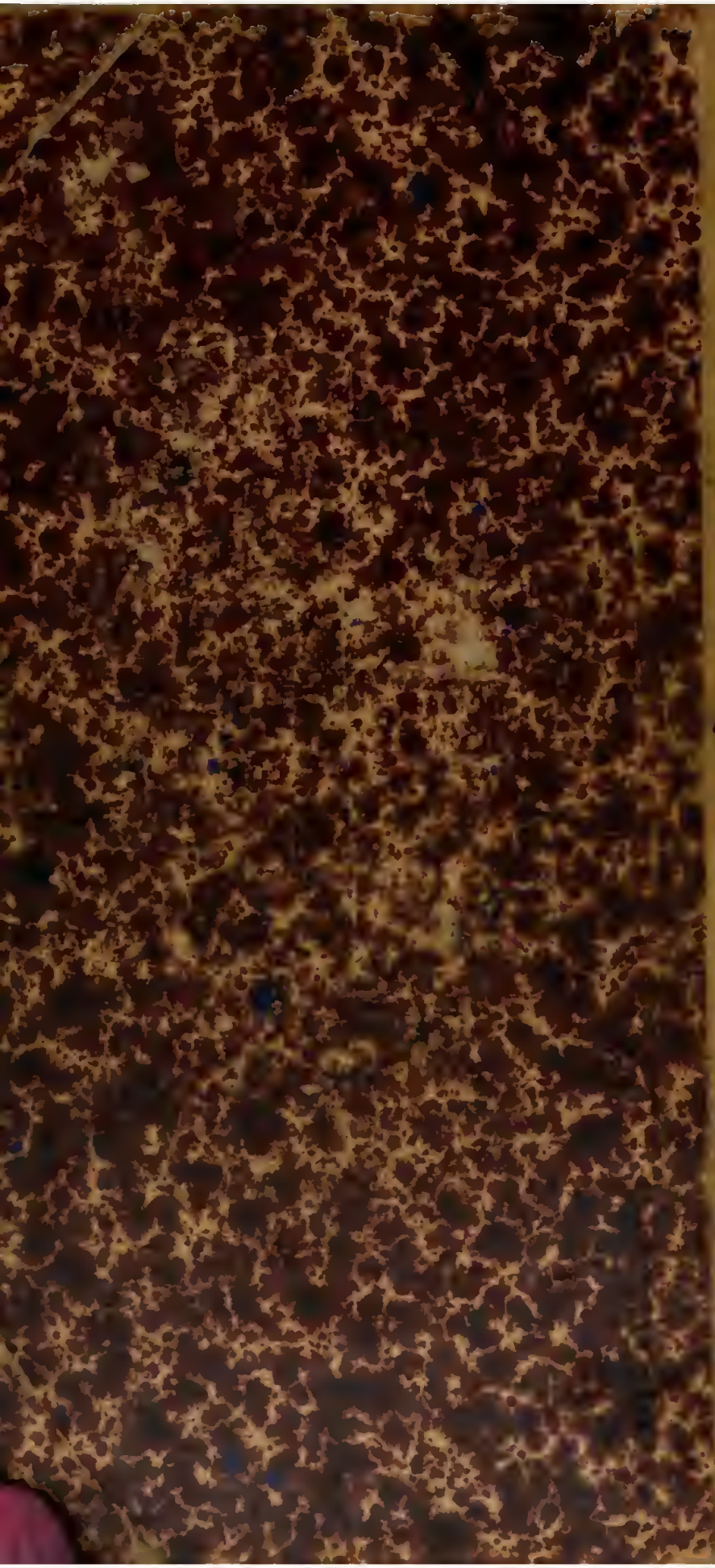
19° Étant données deux des surfaces considérées dans le problème précédent, trouver une surface de révolution du second degré (ayant pour axe l'un des axes de ces surfaces) à laquelle appartienne la ligne d'intersection.

20° Étant donnés les paraboloïdes représentés par l'équation

$$\frac{y^2}{p-\alpha}+\frac{z^2}{q-\alpha}=2x-\alpha,$$

dans laquelle α est un paramètre arbitraire; si l'on attribue au paramètre α deux valeurs telles que les paraboloïdes correspondants se coupent, ils se couperont à angle droit. Lorsqu'un paraboloïde est coupé par deux autres d'espèces différentes, les tangentes aux deux lignes d'intersection au point commun sont parallèles aux axes de la section faite dans la première surface par un plan parallèle au plan tangent en ce point.

21° Étant donnés deux des paraboloïdes considérés précédemment, on propose, lorsque ces paraboloïdes se coupent, de trouver une surface de révolution du second degré (ayant pour axe l'axe commun des paraboloïdes) à laquelle appartienne la ligne d'intersection.

FIN.

H. CORNAMUSAZ
RELIEUR
LAUSANNE